Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Dag Wessel-Berg
Mobil: 92448828

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Bokmål
Mandag 19. desember 2011
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 For $x^2 \neq y^2$, la

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Finn retningsderiverte Df i punktet $(2, 1)$ i retningen bestemt av vektoren $\nu = [1, 1]$. Hva er størst mulig verdi for Df i punktet $(2, 1)$?

Oppgave 2

a) Bestem funksjonene $y(t)$ og $z(t)$ på intervallet $(0, \infty)$ som oppfyller

$$(i)\ y(t) + 3\int_0^t e^{t-u} y(u)\,du - 2te^t = 0$$

$$(ii)\quad z(t) - \int_0^t u^n (t-u)^m\,du = 0$$

for $n, m = 1, 2, 3, \ldots$ ved å benytte Laplace-tranformasjonen.

b) Løs initialverdi-problemet

$$y'' - 6y' + 9y = \delta(t-1) - \delta(t-2)$$
$$y(0) = y'(0) = 0$$

hvor $\delta(t)$ er Dirac's delta-funksjon.

Oppgave 3

a) For $a > 0$, finn Fourier-transformen til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

b) Regn ut verdiene til de to integralene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\omega}{1+\omega^2} d\omega, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \sin\omega}{1+\omega^2} d\omega$$

Oppgave 4

a) Bestem Fourier-sinus rekka til funksjonen $g(x) = 1$ på intervallet $[0, \pi]$. Finn også summen av rekka

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Hint: Parsevals identitet

b) Løs bølgeligningen

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

med randbetingelse og initialbetingelse gitt ved

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ (ii) \quad & u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 1. \end{aligned} \tag{1}$$

c) Ligningen

$$u_{tt} + 8 = 4u_{xx}, \qquad t > 0, \quad 0 < x < \pi \tag{2}$$

er en inhomogen bølgeligning. Bestem de stasjonære (dvs. tidsuavhengige) løsningene $u(x,t) = v(x)$ til denne ligningen, og bestem så den stasjonære løsningen som oppfyller randbetingelsen (i) i (1).

Bestem til slutt løsningen til ligningen (2) med randbetingelse og initialbetingelse gitt ved

$$\begin{aligned} (i) \quad & u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \\ (ii) \quad & u(x,0) = x(x-\pi), u_t(x,0) = 1 \end{aligned}$$

(Bemerkning : Ligningen (2) kan for eksempel være en enkel modell for en svingende streng hvor en tar hensyn til gravitasjonen.)

Oppgave 5

Vi ser på den ordinære differensialligningen av orden to

$$y'' = \cos(xy) + x^2.$$

a) Omskriv ligningen til et system av første ordens differensialligninger, og sett opp iterasjonsskjemaet som fremkommer ved anvendelse av Heun's metode.

b) Utfør en iterasjon med denne metoden, med steglengde $h = 0.1$, for å beregne en tilnærmet verdi av løsningen $y(x)$ i punktet $x = 0.1$, når initialverdiene er

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$$

Oppgave 6 Ligningsystemet

$$\begin{aligned} x\cos x + \sin y \cos y &= 0 \\ 2x \sin x + y \cos y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

har en løsning nær punktet $(x, y) = (\pi/2, 0)$. Utfør én iterasjon med Newtons metode for systemer anvendt på systemet ovenfor, med $x = \pi/2$ og $y = 0$ som startverdier.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \\ \text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} - i \frac{1 - \cos aw}{w} \right)$
$u(x) e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} - i \frac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2+a^2}$