TMA4135 Matematikk 4D eksamen 8. august 2011

Løsningsforslag

1 **a)** Andre forskyvningsteorem (side 235 i læreboken) gir at

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = u(t-1),$$
$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = t - (t-1)\,u(t-1),$$

der $u(t)$ er Heaviside-funksjonen.

b) La $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$. Ved å Laplace-transformere differensialligningen

$$y''(t) + y(t) = g(t) - \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

får vi

$$s^2 Y + Y = (s^2+1)Y = \frac{1}{s^2}(1-e^{-s}) - e^{-s} = \frac{1}{s^2} - \frac{1+s^2}{s^2}e^{-s}.$$

Det vil si

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} - \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Delbrøkoppspaltning gir at

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1},$$

slik at

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Ved å ta inverstransformasjonen får vi

$$y(t) = t - \sin t - (t-1)\,u(t-1).$$

2 **a)** Delbrøkoppspaltning gir at

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4+x^2}\right),$$

slik at Fourier-transformasjonen til $f(x)$ er gitt ved

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|w|} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2|w|}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(e^{-|w|} - \frac{1}{2}e^{-2|w|}\right).$$

b) Ved å utnytte symmetrien kan vi skrive

$$\int_0^\infty \left(e^{-w} - e^{-2w}\right)\cos wx\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-2|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w.$$

Dette minner om den oppgitte Fourier-transformen, og vi ser nå at

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-|w|}\right)e^{iwx}\,\mathrm{d}w \\
&= \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

På tilsvarende måte finner vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2}\,\frac{2}{1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2|w|}e^{iwx}\,\mathrm{d}w \\ &= 2\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-2|w|}\right)e^{iwx}\,\mathrm{d}w \\ &= 2\,\frac{1}{4+x^2}.\end{aligned}$$

Følgelig blir

$$\int_0^{\infty}\left(e^{-w}-e^{-2w}\right)\cos wx\,\mathrm{d}w = \frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{4+x^2}.$$

3

a) Fra oppgaveteksten ser vi at $u_0(x)$ tilfredstiller ligningen

$$u_0''(x)+r=0, \quad u_0(0)=0, \quad u_0'(L)=0,$$

som har løsning

$$u_0(x) = rx\left(L-\frac{x}{2}\right).$$

Fra oppgaveteksten vet vi at $u(x,t)$ tilfredstiller ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r, \quad u(0,t)=0, \quad \frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

for $0\le x\le L$ og $t\ge 0$.

Ved å sette inn for $u(x,t)=u_0(x)+v(x,t)$ i (1) får vi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+r \qquad \text{der} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u_0''(x)+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-r+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

det vil si

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Ettersom $u(0,t)=u_0(0)+v(0,t)=v(0,t)=0$ og $\frac{\partial u(L,t)}{\partial x}=u_0'(L)+\frac{\partial v(L,t)}{\partial x}=\frac{\partial v(L,t)}{\partial x}=0$, blir randbetingelse for $v(x,t)$ de samme som for $u(x,t)$, det vil si

$$v(0,t)=0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x}=0. \tag{3}$$

b) Ettersom $u(x,t)=u_0(x)+v(x,t)$ og vi er gitt initialbetingelsen

$$u(x,0)=u_0(x)+\sin\frac{\pi x}{2L}+2\sin\frac{5\pi x}{2L}, \quad 0\le x\le L,$$

får vi initialbetingelsen

$$v(x,0)=\sin\frac{\pi x}{2L}+2\sin\frac{5\pi x}{2L}, \quad 0\le x\le L. \tag{4}$$

For å finne temperaturen i staven for $0\le x\le L$ og $t\ge 0$, trenger vi å finne løsningen til (2), gitt randbetingelser (3) og initialbetingelse (4).

La så $v(x,t)=F(x)G(t)$. Innsatt i (2) får vi

$$F(x)\dot{G}(t)=F''(x)G(t),$$

det vil si

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{=k}=\underbrace{\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}}_{=k}.$$

Dette gir oss to ligninger å løse

$$F''(x) - kF(x) = 0, \tag{5}$$
$$\dot{G}(t) - kG(t) = 0. \tag{6}$$

Løser så (5). Anta at $k = -p^2$. Det vil si,

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0,$$

som har generell løsning

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Randbetingelsene (3) gir at $F(0) = 0$ og at $F'(L) = 0$. Fra $F(0) = 0$ får vi at $A = 0$. Fra $F'(L) = 0$ får vi at

$$pL = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

slik at

$$p = p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(For $k \geq 0$ står vi kun igjen med den trivielle løsningen $v(x,t) = 0$.)
Altså har vi at

$$F_n(x) = B_n \sin p_n x = B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Innsatt for $k = -p_n^2$ i (6) får vi

$$\dot{G}(t) + p_n^2 G(t) = 0,$$

som har løsning

$$G_n(t) = C_n e^{-p_n^2 t} = C_n \exp\left\{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t\right\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dermed har vi at

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x) G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left\{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2L}\right)^2 t\right\} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

der $A_n = B_n C_n$.
Initialbetingelsen (4) gir så at

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} = \sin \frac{\pi x}{2L} + 2\sin \frac{5\pi x}{2L},$$

det vil si $A_1 = 1$, $A_3 = 2$ og $A_n = 0$ for alle andre verdier av n.
Altså er

$$v(x,t) = \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\} \sin \frac{\pi x}{2L} + 2\exp\left\{-\left(\frac{5\pi}{2L}\right)^2 t\right\} \sin \frac{5\pi x}{2L},$$

som igjen gir at temperaturen i staven er gitt ved

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_0(x) + v(x,t) \\ &= rx\left(L - \frac{x}{2}\right) + \exp\left\{-\left(\frac{\pi}{2L}\right)^2 t\right\} \sin \frac{\pi x}{2L} + 2\exp\left\{-\left(\frac{5\pi}{2L}\right)^2 t\right\} \sin \frac{5\pi x}{2L}, \end{aligned}$$

for $0 \leq x \leq L$, og $t \geq 0$.

4 **a)** Ved Lagrange-interpolasjon:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{(x-\frac{1}{2})(x-1)}{-\frac{1}{2}\cdot(-1)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x(x-1)}{\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-\frac{1}{2})}{1\cdot\frac{1}{2}} \\ &= (2x^2-3x+1) + \frac{2}{3}(-4x^2+4x) + \frac{1}{2}(2x^2-x) \\ &= \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1. \end{aligned}$$

Ved bruk av dividerte differenser får vi følgende tabell

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ & & -2/3 & \\ 1/2 & 2/3 & & 1/3 \\ & & -1/3 & \\ 1 & 1/2 & & \end{array}$$

og polynomet blir

$$p(x) = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{5}{6}x + 1.$$

Dette gir $y(3/4) \approx p(3/4) = 3/16 = 0{,}562500$.

(Til sammenligning: den underliggende funksjonen er $y(x) = 1/(1+x)$ slik at $y(3/4) = 4/7 \approx 0{,}571428$.)

b) Vi finner en tilnærmelse til integralet ved å integrere interpolasjonspolynomet:

$$\int_0^1 p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{25}{36} \approx 0{,}694444.$$

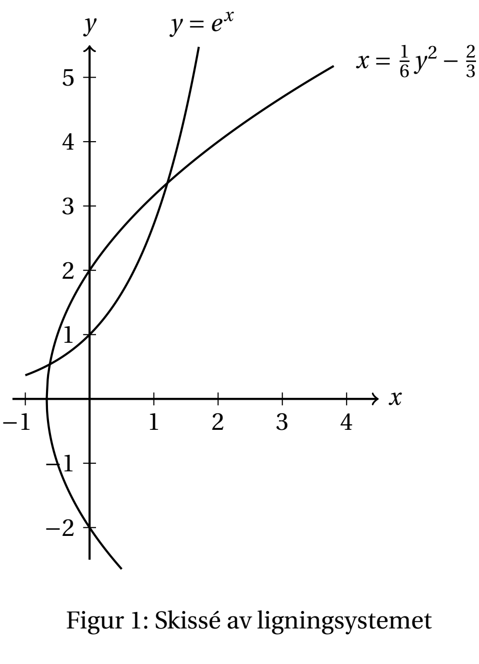
Trapesmetoden gir

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + \frac{1}{2}y_2\right) = \frac{17}{24} \approx 0{,}708333.$$

Feilen ved bruk av de to metodene er henholdsvis $1{,}3\cdot10^{-3}$ og $1{,}5\cdot10^{-2}$. Vi får alstå en vesentlig bedre tilnærmelse ved å integrere 2. grads-polynomet (som i dette tilfellet gir samme resultat som om vi hadde brukt Simpsons metode).

5 Fra ligningssystemet ser vi at

$$y = e^x \quad \text{og} \quad x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}.$$



Figur 1: Skissé av ligningssystemet

Fra figur 1 er det klart at ligningssystemet har to løsninger.
Jacobi-matrisen til ligningssystemet er gitt ved

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(e^x - y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(e^x - y) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(y^2 - 6x - 4) & \dfrac{\partial}{\partial y}(y^2 - 6x - 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & -1 \\ -6 & 2y \end{bmatrix},$$

slik at

$$J^{(0)} = J\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = J(1,3) = \begin{bmatrix} e & -1 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi har ved Newtons metode for system av ikke-lineære ligninger at

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)},$$

der $J^{(0)}\Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\mathbf{f}\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)$.
I vårt tilfelle er

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^x - y \\ y^2 - 6x - 4 \end{bmatrix}, \quad \text{der} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Dette gir følgende ligningssystem med hensyn på $\Delta\mathbf{x}^{(0)}$

$$\begin{bmatrix} e & -1 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^{(0)} \\ \Delta y^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e - 3 \\ 9 - 6 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - e \\ 1 \end{bmatrix},$$

som har løsning

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \dfrac{19 - 6e}{6(e-1)} \\ \dfrac{1}{6} + \dfrac{19 - 6e}{6(e-1)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}2610 \\ 0{,}4276 \end{bmatrix}.$$

Altså er

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} 1{,}2610 \\ 3{,}4276 \end{bmatrix}.$$

6 Ved å innføre

$$y_1(t) = x(t),$$
$$y_2(t) = x'(t)$$

kan vi skrive om differensialligningen

$$x''(t) + x(t) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0,$$

til følgende system av første ordens differensialligninger

$$y_1'(t) = x'(t) = y_2(t),$$
$$y_2'(t) = x''(t) = -x(t) = -y_1(t),$$

med initialbetingelser $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 0$.

(i) Eulers metode gir at

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{y}_n),$$

der h er skrittlengden.
I vårt tilfelle er $h = 0{,}1$ slik at

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + 0{,}1\,\mathbf{f}(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}1 \end{bmatrix},$$

som igjen gir at

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + 0{,}1\,\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} 1{,}0 \\ -0{,}1 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} -0{,}1 \\ -1{,}0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}99 \\ -0{,}20 \end{bmatrix} \tag{7}$$

(ii) Et steg (med skrittlengde $h = 0{,}1$) med baklengs Euler gir ligningssystemet

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + 0{,}1\,\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} y_2^{(2)} \\ -y_1^{(1)} \end{bmatrix},$$

det vil si

$$\begin{bmatrix} 1{,}0 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 1{,}0 \end{bmatrix} \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som har løsning

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1{,}00/1{,}01 \\ -0{,}10/1{,}01 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}9901 \\ -0{,}0990 \end{bmatrix}.$$

Et steg med Eulers metode gir så

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + 0{,}1\,\mathbf{f}(t_1, \mathbf{y}_1) \approx \begin{bmatrix} 0{,}9901 \\ -0{,}0990 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} -0{,}0990 \\ -0{,}9901 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0{,}9802 \\ -0{,}1980 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Alternativ (i) gir ved (7) at $x(0{,}2) \approx 0{,}99$ og $x'(0{,}2) \approx -0{,}20$, slik at

$$x(0{,}2)^2 + x'(0{,}2)^2 \approx 1{,}0201.$$

Alternativ (ii) gir ved (8) at $x(0{,}2) \approx 0{,}9901$ og $x'(0{,}2) \approx -0{,}1980$, slik at

$$x(0{,}2)^2 + x'(0{,}2)^2 \approx 1{,}0000.$$

Ut fra dette kan vi slutte at alternativ (ii) gir best resultat.