Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Harald Krogstad telefon 416 51 817 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Bokmål
Mandag 8. august 2011
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1

a) Finn $f(t)$ og $g(t)$ når deres Laplace-transformasjon er

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s}e^{-s},$$

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{1}{s^2}(1 - e^{-s}).$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = g(t) - \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

der $g(t)$ er definert som i punkt **a)** og δ betegner deltafunksjonen.

Oppgave 2 Fourier-transformasjonen til funksjonen

$$g(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a > 0,$$

er gitt ved

$$\hat{g}(w) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-a|w|}.$$

a) Bestem Fourier-transformasjonen til funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(4+x^2)}.$$

Vink: Benytt delbrøkoppspaltning.

b) Regn ut integralet

$$\int_0^\infty (e^{-w} - e^{-2w}) \cos wx \, \mathrm{d}w.$$

Oppgave 3 En radioaktiv stav ligger langs x-aksen fra $x = 0$ til $x = L$. Materialet i staven utvikler varme slik at temperaturen i staven, $u(x,t)$, tilfredstiller ligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r, \quad 0 \le x \le L, \, 0 \le t, \tag{$*$}$$

der varmeproduksjonen, r, er en postiv konstant. Temperaturen ved $x = 0$ holdes konstant lik 0, $u(0,t) = 0$, mens staven er varmeisolert ved $x = L$, slik at $\frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = 0$, $0 \le t$.

Under normale forhold er temperaturen i staven uavhengig av tiden, og denne løsningen for temperaturen betegnes ved $u_0(x)$, det vil si $\frac{\partial u_0}{\partial t} = 0$.

a) Bestem $u_0(x)$ ut fra $(*)$ og randbetingelsene. Skriv $u(x,t) = u_0(x) + v(x,t)$, og vis at differensialligningen og randbetingelser for $v(x,t)$ er

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} = 0.$$

b) Ved $t = 0$ er temperaturen i staven

$$u(x,0) = u_0(x) + \sin\frac{\pi x}{2L} + 2\sin\frac{5\pi x}{2L}, \quad 0 \le x \le L.$$

Finn temperaturen i staven for $0 \le x \le L$, $0 \le t$.

Oppgave 4 La $y(x)$ være en funksjon, definert på intervallet $0 \le x \le 1$. Funksjonen selv er ukjent, men funksjonsverdien er kjent i gitte punkter, oppgitt i tabellen under.

i	0	1	2
x_i	0	1/2	1
$y(x_i)$	1	2/3	1/2

a) Finn polynomet $p(x)$ av lavest mulig grad som interpolerer $y(x)$ i punktene gitt i tabellen. Bruk dette til å finne en tilnærmelse til $y(3/4)$.

b) Bruk polynomet $p(x)$ til å finne en tilnærmelse til integralet $\int_0^1 y(x)\,\mathrm{d}x$. Bruk deretter trapesmetoden til å finne en annen tilnærmelse til samme integralet.

Den eksakte verdien av integralet er $\ln 2$. Hva blir feilen i de to approksimasjonene, og hvilken er best?

Oppgave 5 Gitt systemet av ikke-lineære ligninger

$$\begin{aligned} e^x - \quad y &= 0, \\ y^2 - 6x &= 4. \end{aligned}$$

Lag en skissé, og vis hvor mange løsninger dette systemet har.

Gjør deretter én iterasjon med Newtons metode, med startverdier $x^{(0)} = 1$, $y^{(0)} = 3$.

Oppgave 6 Gitt differensialligningen

$$x''(t) + x(t) = 0, \qquad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Skriv om denne til et system av første ordens differensialligninger. Finn tilnærmelser til $x(0{,}2)$ og $x'(0{,}2)$ ved henholdsvis

(i) to skritt med Eulers metode,

(ii) ett skritt med baklengs Eulers metode (se vink), etterfulgt av ett med (vanlig) Euler.

Skrittlengden er altså $h = 0{,}1$ i begge tilfellene.

Den eksakte løsningen av ligningen er $x(t) = \cos(t)$, og det er lett å vise at

$$x(t)^2 + x'(t)^2 = 1$$

for alle t. Hvilken av de to metodene gir approksimasjoner som bevarer denne egenskapen best? (I denne oppgaven er det tilstrekkelig å sjekke for $t = 0{,}2$.)

Vink: For en ordinær differensialligning $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ er et skritt med baklengs Eulers metode gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1}).$$

Tilnærmelsen $\mathbf{y}_{n+1}$ må altså løses ut fra ligningen for hvert skritt.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathscr{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\,\mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin aw}{w} - i\frac{1-\cos aw}{w}\right)$
$u(x)e^{-x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+w^2} - i\frac{w}{1+w^2}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{w^2+a^2}$