Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
1. desember 2012

Løsningsforslag

1 Ved lagrangeinterpolasjon har vi

$$
\begin{aligned}
p_2(x) &= f(0)\frac{(x-1/2)(x-3/2)}{(0-1/2)(0-3/2)} + f(1/2)\frac{(x-0)(x-3/2)}{(1/2-0)(1/2-3/2)} + f(3/2)\frac{(x-0)(x-1/2)}{(3/2-0)(3/2-1/2)} \\
&= -2x\left(x-\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}x\left(x-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2}{3}x(5-4x),
\end{aligned}
$$

der vi brukte at $f(0) = \sin 0 = 0$. Vi kunne også brukt Newtons dividerte differanser, svaret blir det samme.

2 **a)** La $h_1(t) = 1$ og $H_1(s) = 1/s$. Ettersom $\mathscr{L}(h_1) = H_1$ får vi ved andre forskyningsteorem at

$$
f(t) = \mathscr{L}^{-1}(F)(t) = h_1(t-1)u(t-1) = u(t-1) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t < 1, \\ 1 & \text{for } t > 1. \end{cases}
$$

La $h_2(t) = t$ og $H_2(s) = 1/s^2$. Ettersom $\mathscr{L}(h_2) = H_2$ får vi ved andre forskyvningsteorem at

$$
g(t) = \mathscr{L}^{-1}(G)(t) = 2h_2(t-2)u(t-2) = 2(t-2)u(t-2) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t < 2, \\ 2(t-2) & \text{for } t > 2. \end{cases}
$$

b) Vi kan skrive integralligningen som

$$
(y * y)(t) - 3(f * y)(t) + g(t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{$*$}
$$

Laplacetransformasjon anvendt på $(*)$ gir

$$
Y^2 - 3FY + G = 0,
$$

der $Y = \mathscr{L}(y)$, og vi har benyttet at $\mathscr{L}(\gamma_1 * \gamma_2) = \mathscr{L}(\gamma_1)\mathscr{L}(\gamma_2)$ for to (passende) funksjoner $\gamma_1(t)$ og $\gamma_2(t)$.
Legg merke til at $G = 2F^2$. Det gir

$$
Y^2 - 3FY + 2F^2 = (Y-F)(Y-2F) = 0.
$$

Det vil si, $Y_1 = F$ og $Y_2 = 2F$, som igjen gir $y_1(t) = f(t)$ og $y_2(t) = 2f(t)$ som løsninger av $(*)$.

3 **a)** Fourierrekken til f er gitt ved

$$
a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)
$$

der

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 && (f \text{ odde}) \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots && (f \text{ odde}) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x && (f \text{ odde}) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(n-1/2)x - \cos(n+1/2)x]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n-1/2)x}{n-1/2} - \frac{\sin(n+1/2)x}{n+1/2}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n-1/2} - \frac{(-1)^n}{n+1/2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left(\frac{1}{n-1/2} + \frac{1}{n+1/2}\right) = \frac{8}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}, \quad n = 1,2,3,\ldots
\end{aligned}
$$

Altså er fourierrekken til f gitt ved

$$
\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin nx.
$$

b) Innsatt for $x = \pi/2$ får vi

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2m+2}(2m+1)}{4(2m+1)^2-1}(-1)^m = \frac{8}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)}{4(2m+1)^2-1} = f(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Det vil si,

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)}{4(2m+1)^2-1} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}} = \frac{\pi}{16}\sqrt{2}.$$

$\boxed{4}$ **a)** Innsatt for $u(x,t) = F(x)G(t)$ i $tu_t = u_{xx}$ får vi

$$tF\dot{G} = F''G, \qquad F'' = \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}, \quad \dot{G} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}.$$

Det gir

$$\underbrace{\frac{F''}{F}}_{k} = \underbrace{\frac{t\dot{G}}{G}}_{k}.$$

Altså får vi to ordinære differensialligninger

$$F'' - kF = 0 \tag{1}$$
$$t\dot{G} - kG = 0. \tag{2}$$

Fra randbetingelsene, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, får vi $F(0) = F(\pi) = 0$. Vi må se på tilfellene

(i) $k > 0$

(ii) $k = 0$

(iii) $k < 0$.

(i) La $k = \mu^2 > 0$. Innsatt i (1) gir det

$$F'' - \mu^2 F = 0$$

som har løsning

$$F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}.$$

Fra $F(0) = 0$ får vi $A + B = 0$. Det vil si,

$$F(x) = A\left(e^{\mu x} - e^{-\mu x}\right) = 2A\sinh\mu x.$$

Fra $F(\pi) = 0$ får vi $A = 0$ ettersom $\sinh\mu\pi \neq 0$. Dermed får vi kun den trivielle løsningen $F(x) = 0$.

(ii) Innsatt for $k = 0$ i (1) får vi

$$F'' = 0$$

som har løsning

$$F(x) = Ax + B.$$

Fra $F(0) = F(\pi) = 0$ får vi $A = B = 0$. Dermed får vi kun den trivielle løsningen $F(x) = 0$.

(iii) La $k = -p^2 < 0$. Innsatt i (1) gir det

$$F'' + p^2F = 0$$

som har løsning

$$F(x) = A\cos px + B\sin px.$$

Fra $F(0) = 0$ får vi $A = 0$. Fra $F(\pi) = 0$ får vi

$$B\sin p\pi = 0$$

som medfører enten $B = 0$ eller $p\pi = n\pi$, $n = 1,2,3,\ldots$ Da $B = 0$ kun gir den trivielle løsningen er vi interessert i tilfellet $p = n$, $n = 1,2,3,\ldots$ som gir

$$F_n(x) = \tilde{B}_n\sin nx.$$

Innsatt for $k=-n^2$ i (2) får vi

$$t\dot{G}+n^2G=0.$$

Det vil si,

$$\dot{G}=-\frac{n^2}{t}G$$

som har løsning

$$G_n(t)=C_n t^{-n^2}.$$

Altså er de løsningene av $tu_t=u_{xx}$ som kan skrives på formen $u(x,t)=F(x)G(t)$, og som tilfredstiller randbetingelsene $u(0,t)=u(\pi,t)=0$, gitt ved

$$u_n(x,t)=F_n(x)G_n(t)=B_n t^{-n^2}\sin nx, \quad n=1,2,3,\dots,$$

der $B_n=\tilde{B}_nC_n$. Den generelle løsningen er så gitt ved

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n t^{-n^2}\sin nx.$$

b) Fra

$$u(x,1)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n 1^{-n^2}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin nx=\sin 2x+5\sin 5x$$

får vi $B_2=1$, $B_5=5$ og $B_n=0$ for $n\neq 2,5$. Det gir

$$u(x,t)=t^{-4}\sin 2x+5t^{-25}\sin 5x.$$

5 Integralligningen kan skrives på formen

$$xe^{-x^2}=(f*g)(x), \tag{$*$}$$

der $g(x)=e^{-2x^2}$.

For en passende funksjon H gjelder det at $\mathscr{F}(H')=i\omega\mathscr{F}(H)$. La

$$H(x)=-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}, \quad a>0,$$

og la $h(x)=xe^{-ax^2}$. Legg merke til at $H'=h$. Det gir

$$\hat{h}(\omega)=\mathscr{F}(h)(\omega)=i\omega\mathscr{F}(H)(\omega)=-\frac{i\omega}{(2a)^{3/2}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.$$

La $\hat{f}=\mathscr{F}(f)$. Fouriertransformasjon anvendt på $(*)$ gir så

$$-\frac{i\omega}{2\sqrt{2}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}=\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{\omega^2}{8}},$$

der vi har satt $a=1$ i uttrykket for $\hat{h}(\omega)$ og brukt at $\mathscr{F}(f*g)=\sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f)\mathscr{F}(g)$. Det gir

$$\hat{f}(\omega)=-\frac{i\omega}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{8}}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(-\frac{i\omega}{8}e^{-\frac{\omega^2}{8}}\right).$$

Ved å ta inverstransformen får vi

$$f(x)=\frac{4}{\sqrt{\pi}}xe^{-2x^2}.$$

6 Ved fempunktsformelen får vi følgende differanseskjema

$$\frac{U_{i+1,j}+U_{i,j+1}+U_{i-1,j}+U_{i,j-1}-4U_{i,j}}{h^2}=4x_iy_j=4h^2ij=\frac{1}{4}ij.$$

Det vil si,

$$U_{i+1,j}+U_{i,j+1}+U_{i-1,j}+U_{i,j-1}-4U_{i,j}=\frac{h^2}{4}ij=\frac{1}{64}ij.$$

Fra randbetingelsene får vi

$$U_{i,4} = 0, \quad i = 0,1,\ldots,4$$
$$U_{i,i} = 4x_i(1-x_i) = 4hi(1-hi) = i\left(1-\frac{1}{4}i\right), \quad i = 0,1,\ldots,4$$
$$U_{0,j} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,4.$$

Fra differanseskjemaet får vi følgende ligningssystem

$$U_{2,2} + U_{1,3} + U_{0,2} + U_{1,1} - 4U_{1,2} = \frac{1}{64}\cdot 1\cdot 2 = \frac{1}{32}$$
$$U_{2,3} + U_{1,4} + U_{0,3} + U_{1,2} - 4U_{1,3} = \frac{1}{64}\cdot 1\cdot 3 = \frac{3}{64}$$
$$U_{3,3} + U_{2,4} + U_{1,3} + U_{2,2} - 4U_{2,3} = \frac{1}{64}\cdot 2\cdot 3 = \frac{3}{32}.$$

Innsatt for randbetingelsene, og $X = U_{1,2}$, $Y = U_{1,3}$ og $Z = U_{2,3}$ kan vi skrive dette som

$$1 + Y + 0 + \frac{3}{4} - 4X = \frac{1}{32}$$
$$Z + 0 + 0 + X - 4Y = \frac{3}{64}$$
$$\frac{3}{4} + 0 + Y + 1 - 4Z = \frac{3}{32}$$

Det vil si,

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55/32 \\ 3/64 \\ -53/32 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -1{,}7188 \\ 0{,}0469 \\ -1{,}6563 \end{bmatrix}.$$

7 Metoden som er implementert er Heuns metode. Det vil si,

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

der

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$
$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1).$$

I vårt tilfelle er $h = 0{,}25$ og

$$f(x,y) = \frac{\cos x}{2y-2}.$$

Videre så er $x_0 = 0$ og $y_0 = y(x_0) = 3$. Ved å sette $N = 2$ i programmet regner vi ut y_2 (som er en tilnærming til $y(x_2)$). Legg merke til at størrelsen `A` i programmet er vår k_1 og at størrelsen `B` i programmet er vår k_2.

Første kjøring av `for`-løkken gir y_1. Vi finner at

$$k_1 = 0{,}25f(x_0, y_0) = 0{,}25f(0,3) = 0{,}0625$$
$$k_2 = 0{,}25f(x_0 + 0{,}25, y_0 + k_1) = 0{,}25f(0{,}25, 3{,}0625) \approx 0{,}0587$$

slik at

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \approx 3{,}0606.$$

Andre kjøring av `for`-løkken gir y_2. Vi finner at

$$k_1 = 0{,}25f(x_1, y_1) \approx 0{,}25f(0{,}25, 3{,}0606) \approx 0{,}0588$$
$$k_2 = 0{,}25f(x_1 + 0{,}25, y_1 + k_1) \approx 0{,}25f(0{,}5, 3{,}1194) \approx 0{,}0518$$

slik at

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \approx 3{,}1159.$$