Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Marius Thaule telefon 73 59 35 30

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Nynorsk
Laurdag 1. desember 2012
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemiddel (kode C): Bestemt enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 21. desember 2012.

Alle svar skal grunngjevast. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 Finn polynomet av lågast mogleg grad som interpolerer funksjonen

$$f(x) = \sin \pi x$$

i punkta $x = 0$, $x = 1/2$ og $x = 3/2$.

Oppgåve 2

a) Finn $f(t)$ og $g(t)$ når deira laplacetransformerte er høvevis

$$F(s) = \frac{1}{s}e^{-s} \quad \text{og} \quad G(s) = \frac{2}{s^2}e^{-2s}.$$

b) Bestem alle løysingane $y(t)$ av integrallikninga

$$\int_0^t [y(\tau) - 3f(\tau)]\, y(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau + g(t) = 0, \qquad t \geq 0,$$

der f og g er funksjonane definert i **a)**.

Oppgåve 3 Følgjande trigonometriske identitet er gitt:

$$\sin\frac{x}{2}\sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

a) Vis at fourierrekka til funksjonen f gitt ved

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} \quad \text{for} \quad -\pi \le x < \pi,$$

der f er periodisk med periode 2π, er gitt ved

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{4n^2-1}\sin nx.$$

b) Vis at

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)}{4(2m+1)^2-1} = \frac{\pi}{16}\sqrt{2}.$$

Oppgåve 4

a) Finn dei løysingane av den partielle differensiallikninga

$$t\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0)$$

som kan skrivast på forma

$$u(x,t) = F(x)G(t),$$

og som tilfredstiller randkrava

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad (t > 0).$$

(Vink: Den ordinære differensiallikninga $y' = \frac{a}{t}y$, a ein konstant, har løysing $y(t) = Ct^a$ der C er ein konstant.)

b) Finn ei løysing av randverdiproblemet i **a)** som også tilfredstiller kravet

$$u(x,1) = \sin 2x + 5\sin 5x.$$

Oppgåve 5 Bestem $f(x)$ av integrallikninga

$$xe^{-x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(p)e^{-2(x-p)^2}\,\mathrm{d}p$$

ved hjelp av fouriertransformasjon.

(Vink: For $a > 0$ gjeld $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2a}e^{-ax^2}\right) = xe^{-ax^2}$.)

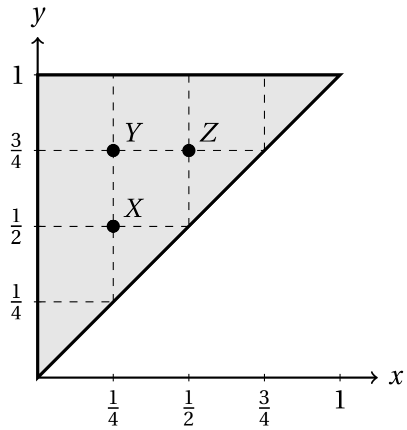
Oppgåve 6 Gitt problemet

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4xy && (0 < x < 1,\ \ x < y < 1)\\
&u(x,1) = 0,\, u(x,x) = 4x(1-x) && (0 \le x \le 1)\\
&u(0,y) = 0 && (0 \le y \le 1).
\end{aligned}$$

Bruk gitteret bestemt av punkta $(x_i, y_j) = (ih, jh)$ med $h = 1/4$.

La $U_{i,j} \approx u(ih, jh)$.

Skriv opp eit lineært likningssystem for dei tre ukjende verdiane $X = U_{1,2}$, $Y = U_{1,3}$ og $Z = U_{2,3}$ i det indre av området (sjå figuren til høgre) ved å nytte fempunktsformelen for å tilnærme $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.



Oppgåve 7 Ein metode for å løyse den ordinære differensiallikninga

$$y' = \frac{\cos x}{2y-2}, \quad y(0) = 3,$$

er implementert i Python.

```
import numpy as np

def metode(N):
    x = 0
    y = 3

    def f(x,y):
        return (np.cos(x))/(2*y - 2)

    for n in range(0, N): # 0 <= n <= N - 1
        A = 0.25*f(x, y)
        B = 0.25*f(x + 0.25, y + A)
        x = x + 0.25
        y = y + 0.5*(A + B)
    return y
```

Kva blir resultatet av ei kjøring av programmet når $N = 2$? Vis all nødvendig mellomrekning.

Kva for ein metode er det som er implementert?

Formelliste følgjer vedlagt på dei to neste sidene.

Formlar i numerikk

- La $p(x)$ vere eit polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punkta x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dersom at x og alle nodane ligg i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for likningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikkar for løysing av eit lineært likningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

- Heuns metode for løysing av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over nokre laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over nokre fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}$