NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
7. august 2012

Løsningsforslag

1 Se Rottmann, s. 174.

$$T = \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{2}\tan 0 + \tan\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\tan\frac{\pi}{4}\right) = 0.359011.$$

For å finne en øvre grense for feilen trengs:

$$f(x) = \tan x, \qquad f'(x) = 1+\tan^2 x, \qquad f''(x) = 2\tan x + 2\tan^3 x.$$

Funksjonen $\tan x$ er en jevnt stigende i intervallet $(0, \pi/4)$, slik at

$$M = \max_{0<x<\pi/4} |f''(x)| = \left|2\tan\frac{\pi}{4} + 2\tan^3\frac{\pi}{4}\right| = 4.$$

Dermed blir

$$\left|\int_0^{\pi/4} \tan x\,dx - T\right| \le \frac{4(\pi/4)^3}{12\cdot 2^2} = \frac{\pi}{768} = 4.04\cdot 10^{-2}.$$

2 **a)** Bruk integrasjonsregelen to ganger, det vil si:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{9}{s+3}\right\} = 9e^{-3t}, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{9}{s+3}\right\} = \int_0^t e^{-3\tau}\,d\tau = 3(1-e^{-3t}),$$

og til slutt

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\frac{9}{s+3}\right\} = \int_0^t 3(1-e^{-3\tau})\,d\tau = 3t-1+e^{-3t}.$$

Alternativt: ved hjelp av delbrøksoppspalting finner vi at

$$F(s) = \frac{9}{s^2(s+3)} = \frac{3}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}.$$

som selvsagt resulterer i samme $f(t)$ som over. Dessuten

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathscr{L}^{-1}\{e^{-2s}F(s)\} \\ &= \big(3(t-2)-1+e^{3(t-2)}\big)u(t-2) = \begin{cases} 0 & 0<t<2 \\ 3t-7+e^{-3(t-2)} & t>2. \end{cases} \end{aligned}$$

b) Laplace-transformer ligningen:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) = \mathscr{L}\{9(1-u(t-2))\} = \frac{9}{s}(1-e^{-2s})$$

$$Y(s) = -\frac{3}{s(s+3)} + \frac{9}{s^2(s+3)}(1-e^{-2s})$$

slik at

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathscr{L}^{-1}\{Y(s)\} = -(1-e^{-3t}) + 3t - 1 + e^{-3t} - \big(3t-7+e^{-3(t-2)}\big)u(t-2) \\ &= \begin{cases} 3t-2+2e^{-3t}, & 0<t<2, \\ 5+2e^{-3t}-e^{-3(t-2)}, & t>2. \end{cases} \end{aligned}$$

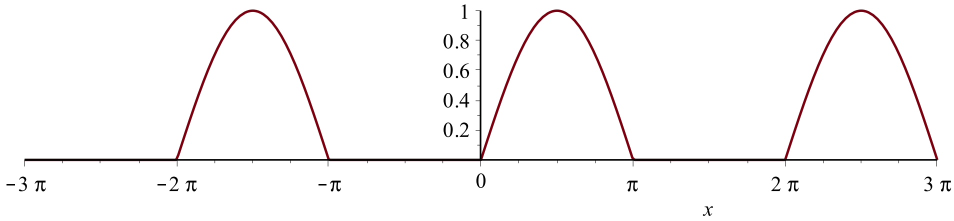
3 Gradienten til f er gitt ved

$$\nabla f = (2x\cos xy - x^2 y \sin xy, -x^3\sin xy),$$

slik at $\nabla f\big|_{(\pi,1)} = (-2\pi, 0)$. Den retningsderiverte til f langs retningen $\mathbf{v} = (-1,1)$ i punktet $(\pi,1)$ blir så

$$D_{\mathbf{u}} f(\pi,1) = \nabla f\big|_{(\pi,1)}\cdot\mathbf{u} = \nabla f\big|_{(\pi,1)}\cdot\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \sqrt{2}\pi.$$

4 **a)** En skisse av funksjonen er gjengitt i figuren under.



Fourierkoeffisientene er gitt ved

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{1}{\pi} \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\big(\sin(1-n)x + \sin(1+n)x\big)\,dx \\
&= \begin{cases} 0, & n = 1 \\ -\frac{1}{\pi}\frac{(-1)^n+1}{n^2-1}, & n \geq 2 \end{cases} \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}\big(\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\big)\,dx \\
&= \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = 1, \\ 0, & n \geq 2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Alle a_n for n odde er altså lik 0. Sett $n = 2m$, og vi får

$$
f(x) \sim \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx\,.
$$

b) La $u(x,t) = G(t)F(x)$ slik at

$$
u_t = \dot{G}\cdot F, \qquad u_{xx} = G\cdot F''
$$

med $\dot{G} = dG/dt$, $F'' = d^2F/dx^2$. Sett inn i ligningen, del med $F\cdot G$ på begge sider, slik at

$$
\frac{\dot{G}}{G} = \frac{F''}{F} = k
$$

der k er en foreløbig ukjent konstant. Vi ender altså med 2 første ordens differensialligninger

$$
F'' = kF, \qquad \dot{G} = kG.
$$

For den første av disse har vi også randbetingelser, siden

$$
u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \qquad \text{må} \qquad F'(0) = F'(\pi) = 0,
$$

så vi løser ligningen for F først. Løsningen av denne avhenger av vår ukjente konstant k, og følgende 3 tilfeller kan oppstå:

– $k = \gamma^2 > 0$. Da er

$$
F(x) = C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x},
$$

for vilkårlige konstanter C_1 og C_2. Setter inn randbetingelsene:

$$
\begin{aligned}
&F'(x) = C_1\gamma e^{\gamma x} - C_2\gamma e^{-\gamma x} \\
&F'(0) = \gamma(C_1 - C_2) = 0 && \Rightarrow \quad C_1 = C_2 \\
&F'(\pi) = \gamma(C_1 e^{\gamma\pi} - C_2 e^{-\gamma\pi}) = 0 && \Rightarrow \quad C_1(e^{\gamma\pi} - e^{-\gamma\pi}) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0.
\end{aligned}
$$

For $k > 0$ er det altså bare den trivielle løsningen $F = 0$ som både oppfyller differensiallignen for F og grensebetingelsene.

– $k = 0$. I dette tilfellet er løsningene gitt ved

$$F = B_0 x + A_0.$$

Hvor igjen A_0 og B_0 er vilkårlige konstanter. Setter vi inn randbetingelsene, får vi

$$F' = B_0, \qquad F'(0) = B_0 = 0, \qquad F'(\pi) = B_0 = 0.$$

Løsningen $F(x) = A_0$ tifredstiller altså differensialligningen for F og randbetingelsene for alle konstanter A_0.

– $k = -\mu^2 < 0$. Gjentar vi prosessen får vi løsningen

$$F(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x$$

med vilkårlige konstanter A og B. Randbetingelsene:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mu(-A\sin\mu x + B\cos\mu x) \\ F'(0) &= \mu B = 0, && \Rightarrow \qquad B = 0 \\ F'(\pi) &= 0 = -A\sin\mu\pi = 0 \end{aligned}$$

Den siste av disse er oppfylt derosm $\mu = n\pi$, der n er et heltall, dvs. $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi kan da løse differensialligningen for G, som med $k = -n^2$ har løsningen

$$G_n(t) = C_n e^{-n^2 t}.$$

Det betyr at

$$u_n(x,t) = e^{-n^2 t}\cos nx, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

alle er løsninger av den partielle differensialligningen med grensebetingelser. Den generelle løsningen er da

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t}\cos nx.$$

c) Vi skal altså bestemme A_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, slik at

$$u(x,0) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos nx, \qquad 0 < x < \pi.$$

Fra punkt **a)** vet vi at

$$\sin x = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx$$

for $0 < x < \pi$. Denne må skrives om litt: ta sinusleddet på høyre side og flytt over på venstre side av likhetstegnet, og multipliser med 2. Da er

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx, \qquad 0 < x < \pi.$$

Sammenlign ledd for ledd: $A_0 = \frac{2}{\pi}$, $A_n = 0$ for n odde, og $A_n = \frac{4}{\pi(n^2-1)}$ for n like, dvs.

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1}e^{-4m^2 t}\cos 2mx.$$

$\boxed{5}$ Vi finner at

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\cos x e^{-iwx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{0}(e^{(1+i-iw)x} + e^{(1-i-iw)x})\,dx + \int_{0}^{\infty}(e^{(-1+i-iw)x} + e^{(-1-i-iw)x})\,dx\Big) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{1+i-iw} + \frac{1}{1-i-iw} - \frac{1}{-1+i-iw} - \frac{1}{-1-i-iw}\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\frac{1}{1+(1-w)^2} + \frac{1}{1+(1+w)^2}\Big). \end{aligned}$$

6 Bruk:

$$u_t(x_i,t_j) \approx \frac{1}{k}(u(x_i,t_j+k) - u(x_i,t_j)), \qquad u_{xx}(x_i,t_j) \approx \frac{1}{h^2}(u(x_i+h,t_j) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i-h,t_j).$$

Sett dette inn i ligningen, og la $U_{ij} \approx u(x_i,t_j)$:

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i,j-1})$$

Setter vi inn randverdiene $U_{0j} = U_{Nj} = 0$ og startverdien $U_{i0} = x_i(1-x_i)$ får vi følgende skjema:

For $j = 0,1,2,\ldots$:

$$U_{i,j+1} = U_{ij} + \frac{k}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}, \qquad i = 1,2,\cdots,N-1.$$

Med $k = 1/10$, $h = 1/3$ får vi at $r = 9/10$. Startverdiene blir:

$$U_{00} = 0,\ U_{10} = \frac{2}{9},\ U_{20} = \frac{2}{9},\ U_{30} = 0,$$

og

$$u(1/3,10) \approx U_{11} = \frac{1}{45}, \qquad u(2/3,1/10) \approx U_{21} = \frac{1}{45}.$$

7 Vi har

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_1x_2 + 2 \\ x_1 e^{-x_2} - 1 \end{pmatrix}, \qquad J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1-x_2 & 1-x_1 \\ e^{-x_2} & -x_1e^{-x_2} \end{pmatrix}$$

En iterasjon med Newtons metode, med startverdier $\mathbf{x}^{(0)} = (0.1, 0.2)^T$ blir:

Løs

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.8187 & -0.0819 \end{pmatrix} \Delta\mathbf{x}^{(0)} = -\begin{pmatrix} 2.28 \\ -0.9181 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7972 \\ -3.2420 \end{pmatrix}$$

og

$$x_1^{(1)} = 0.1 + 0.7972 = 0.8973, \qquad x_2^{(1)} = 0.2 - 3.2420 = 3.0420.$$

8 Vi har at

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = y_1^2 - xy_2.$$