Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dag Wessel-Berg: mobil 92448828

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Bokmål
Tirsdag 7. august 2012
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemidler (kode C): Enkel kalkulator (Hewlett Packard HP30S eller Citizen SR-270X)
Rottmann: *Matematiske formelsamling*

Alle svar skal begrunnes og det skal gå klart frem hvordan svarene er oppnådd.

Oppgave 1 Finn en tilnærmelse til integralet

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\, dx$$

ved hjelp av trapesmetoden med skrittlengde $h = \pi/8$.

Finn en øvre grense for feilen.

Oppgave 2

a) Finn den invers Laplace transformerte for funksjonene

$$F(s) = \frac{9}{s^2(s+3)}, \qquad G(s) = \frac{9e^{-2s}}{s^2(s+3)}.$$

b) Løs differensialligningen

$$y''(t) + 3y'(t) = \begin{cases} 9 & \text{for} \quad 0 < t < 2 \\ 0 & \text{for} \quad t > 2 \end{cases}.$$

med startverdier $y(0) = 0$ og $y'(0) = -3$.

Oppgave 3 La $f(x,y) = x^2\cos(xy)$. Bestem $\vec{\nabla} f$, og finn den retningsderiverte til $f(x,y)$ i punktet $(\pi, 1)$ i retningen bestemt ved $\vec{v} = [-1, 1]$.

Oppgave 4 La $f(x)$ være en 2π-periodisk funksjon definert på $(-\pi, \pi)$ ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq 0, \\ \sin x & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

a) Skisser funksjonen.

Finn den 2π-periodiske Fourierrekken for $f(x)$.

b) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = G(t) \cdot F(x)$ av den partielle differensialligningen

$$u_t = u_{xx}, \qquad \text{for } 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

med grensebetingelser

$$u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \qquad \text{for } t > 0.$$

c) Bruk resultatet fra punkt **a)** til å finne den løsningen av differensialligningen i punkt **b)** som i tillegg tilfredstiller startbetingelsen

$$u(x,0) = \sin(x), \qquad 0 \leq x \leq \pi.$$

Oppgave 5 Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen

$$f(x) = e^{-|x|}\cos(x).$$

Oppgave 6 La $u(x,t)$ være en løsning av den partielle differensialligningen

$$\begin{array}{lr} u_t = u_{xx} & \text{for } x \in (0,1), t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & \text{for } t > 0, \\ u(x,0) = x(1-x) & \text{for } x \in (0,1). \end{array}$$

La $x_i = i \cdot h$ for $i = 0, 1, \cdots, N$, $h = 1/N$, og $t_j = j \cdot k$. Sett opp et *eksplisitt* differenseskjema for å finne tilnærmelser til løsningen $U_{ij} \approx u(x_i, t_j)$ i gridpunktene.

Bruk dette skjemaet med $h = 1/3$ og $k = 1/10$ til å finne tilnærmelser til løsningene $u(1/3, 1/10)$ og $u(2/3, 1/10)$.

Oppgave 7 Utfør en iterasjon med Newtons metode på følgende ligningssystem:

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_1 x_2 + 2 = 0 \\ x_1 e^{-x_2} - 1 = 0 \end{array} .$$

Bruk $x_1 = 0.1$ og $x_2 = 0.2$ som startverdier.

Oppgave 8 Gitt følgende 2. ordens differensialligning:

$$y'' = y^2 - xy'.$$

Skriv om ligningen til et system av første ordens differensialligninger.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} \text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \\ \text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \end{aligned}$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen Laplace-transformer

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$

Tabell over noen Fourier-transformer

$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(w) = \dfrac{1}{a} \hat{f}\left(\dfrac{w}{a}\right)$
$u(x) - u(x-a)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{\sin aw}{w} - i \dfrac{1-\cos aw}{w} \right)$
$u(x)e^{-x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{1}{1+w^2} - i \dfrac{w}{1+w^2} \right)$
e^{-ax^2}	$\dfrac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{w^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{a}{w^2+a^2}$