NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
5. desember 2013

Løsningsforslag

1 **a)** La $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ være gitt ved $g(t) = t$. Fra tabellen vedlagt eksamensoppgavene har vi at

$$G(s) = \mathscr{L}(g)(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Første forskyvningsteorem, side 208 i læreboken, gir så

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(s+1)\} = te^{-t}.$$

Det vil si, $f(t) = te^{-t}$.

b) La $Y = \mathscr{L}(y)$. Fra $y(0) = 0$ og $y'(0) = 0$, kan vi slutte at $\mathscr{L}(y')(s) = sY(s)$ og $\mathscr{L}(y'')(s) = s^2Y(s)$. Laplacetransformasjon anvendt på initialverdiproblemet, gitt i oppgaven, gir

$$s^2Y(s) + 2sY(s) + Y(s) = (s+1)^2Y(s) = e^{-s}.$$

Det vil si,

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2}e^{-s}.$$

Ved å kombinere resultatet fra **a)** og andre forskyvningsteorem, side 219 i læreboken, får vi

$$y(t) = (t-1)e^{-(t-1)}u(t-1).$$

2 La $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $g_a(x) = e^{-a|x|}$. Den gitte integralligningen kan skrives ved hjelp av konvolusjonsprodukt, det vil si

$$f(x) = g_2(x) - (g_1 * f)(x). \tag{1}$$

Fra tabellen vedlagt eksamensoppgavene har vi at

$$\mathscr{F}(g_1)(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$$

og

$$\mathscr{F}(g_2)(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\omega^2}.$$

La $\hat{f} = \mathscr{F}(f)$. Fouriertransformasjon anvendt på (1) gir

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4+\omega^2} - \frac{2}{1+\omega^2}\hat{f}(\omega), \tag{2}$$

der vi har benyttet at $\mathscr{F}(g_2 * f) = \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(g_2)\mathscr{F}(f)$. Ved å løse (2) med hensyn på $\hat{f}(\omega)$ får vi

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2(1+\omega^2)}{(3+\omega^2)(4+\omega^2)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{6}{4+\omega^2} - \frac{4}{3+\omega^2}\right),$$

der den siste likheten fremkommer ved delbrøkoppspalting. Inverstransformasjon gir

$$f(x) = 3e^{-2|x|} - \frac{4}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}|x|}.$$

3 **a)** Fourierrekken til f svarer til fouriercosinusrekken til g, der

$$a_0 = \int_0^1 \sin\pi x \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1 = \frac{2}{\pi},$$

$$a_1 = 2\int_0^1 \sin\pi x\cos\pi x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin 2\pi x \,\mathrm{d}x = 0,$$

og

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 \sin \pi x \cos n\pi x \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \big(\sin(1-n)\pi x + \sin(1+n)\pi x\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{(n-1)\pi}\cos(1-n)\pi x - \frac{1}{(n+1)\pi}\cos(1+n)\pi x\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1} + \frac{1}{(n-1)\pi}\cos(1-n)\pi - \frac{1}{(n+1)\pi}\cos(1+n)\pi \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1} & \text{for} \quad n = 2,4,6,\dots \\ 0 & \text{for} \quad n = 3,5,7,\dots \end{cases}
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $2\sin\alpha x \cos\beta x = \sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x$ (se også side 88 i formelsamlingen). Altså er fourierrekken til f gitt ved

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{4n^2-1}.$$

b) Innsatt for $u(x,t) = F(x)G(t)$ i $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)$ får vi

$$F(x)\dot{G}(t) = F''(x)G(t).$$

Det vil si,

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k} = \underbrace{\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}}_{k},$$

som gir to ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0 \tag{3}$$

$$\dot{G}(t) - kG(t) = 0 \tag{4}$$

Randbetingelsene $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ for $t \geq 0$ gir at

$$F'(0) = F'(1) = 0. \tag{5}$$

Vi har tre muligheter for konstanten k: (i) $k > 0$, (ii) $k = 0$ og (iii) $k < 0$.

(i) Innsatt for $k = \mu^2 > 0$ i (3) får vi $F''(x) - \mu^2 F(x) = 0$ som har løsning $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Fra (5) kan vi slutte at $A = B = 0$, og dermed at $F(x) = 0$, som kun gir den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

(ii) Innsatt for $k = 0$ i (3) får vi $F''(x) = 0$ som har løsning $F(x) = Ax + B$. Fra (5) kan vi slutte at $A = 0$, og dermed at $F(x) = B$ (der B kan være forskjellig fra 0).
Innsatt for $k = 0$ i (4) får vi $\dot{G}(t) = 0$ som har løsning $G(t) = C$.
Altså gir $k = 0$ løsningen

$$u(x,t) = F(x)G(t) = A_0,$$

der $A_0 = BC$.

(iii) Innsatt for $k = -p^2 < 0$ i (3) får vi $F''(x) + p^2 F(x) = 0$ som har løsning $F(x) = A\cos px + B\sin px$. Fra $F'(0) = 0$ får vi at $B = 0$. Fra $F'(1) = 0$ får vi at $A = 0$ eller $p = n\pi$ for $n = 1,2,3,\dots$ Tilfellet $A = 0$ gir kun den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$. Altså har vi at

$$F_n(x) = \tilde{A}_n \cos n\pi x$$

for $n = 1,2,3,\dots$
Innsatt for $k = -n^2\pi^2$ i (4) får vi $\dot{G}(t) + n^2\pi^2 G(t) = 0$ som har løsning

$$G_n(t) = C_n e^{-n^2\pi^2 t}$$

for $n = 1,2,3,\dots$
Altså gir $k < 0$ løsningen

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t},$$

for $n = 1,2,3,\dots$ og der $A_n = \tilde{A}_n C_n$.

Ved å kombinere (ii) og (iii) sitter vi igjen med at de ikke-trivielle løsningene er gitt ved

$$u_n(x,t) = A_n \cos n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t}$$

for $n = 0, 1, 2, \ldots$

c) La

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi x \, e^{-n^2\pi^2 t}.$$

Fra $u(x,0) = \sin \pi x$ for $0 \le x \le 1$ får vi

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi x = \sin \pi x.$$

Altså er A_n fourierkoeffisientene til fouriercosinusrekken til $\sin \pi x$. Fra **a)** vet vi at

$$A_0 = \frac{2}{\pi}, \quad A_{2n-1} = 0 \quad \text{og} \quad A_{2n} = -\frac{4}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$ Det gir

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{4n^2 - 1} e^{-4n^2\pi^2 t}.$$

4 I vårt tilfelle er

$$f\big(x, y(x)\big) = 2000x(10 - y(x)),$$

slik at $f(x_{n+1}, y_{n+1}) = 2000x_{n+1}(10 - y_{n+1})$. Ett steg med baklengs Euler gir

$$y_1 = y_0 + hf(x_1, y_1) = 11 + 2000h^2(10 - y_1).$$

Det vil si,

$$y_1 = \frac{11 + 20000h^2}{1 + 2000h^2} = \frac{211}{21} \approx 10{,}05.$$

Altså gir baklengs Euler at $y(0{,}1) \approx y_1 \approx 10{,}05$.

5 For å løse $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løser vi først $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, og deretter $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (der altså $A = LU$). Fra oppgaveteksten har vi

$$L\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{b},$$

som gir, ved foroversubstitusjon,

$$y_1 = -1, \quad y_2 = 1 - 2y_1 = 3 \quad \text{og} \quad y_3 = 4 - 4y_2 = -8.$$

Fra

$$U\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{bmatrix} = \mathbf{y}$$

får vi, ved tilbakesubstitusjon,

$$x_3 = 8, \quad x_2 = -3 + x_3 = 5 \quad \text{og} \quad x_1 = -1 - x_2 = -6.$$

Altså har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsning $\mathbf{x} = (-6, 5, 8)$.

6 Ved å benytte en sentraldifferanse i rom får vi tilnærmingen

$$u_{xx}(x,t) \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right]. \tag{6}$$

Ved å benytte en foroverdifferanse i tid får vi tilnærmingen

$$u_t(x,t) \approx \frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right]. \tag{7}$$

Innsatt for (6) og (7) i $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + 5u(x,t)$ får vi

$$\frac{1}{k}\left[u(x,t+k) - u(x,t)\right] \approx \frac{1}{h^2}\left[u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)\right] + 5u(x,t). \tag{8}$$

La $x_i = ih$, $i = 0,1,2,3,4$ og $t_j = jk$, $j = 1,2,3,\ldots$, og la $U_{i,j} \approx u(x_i,t_j) = u(ih, jk)$. Da kan skrive (8) som følgende *eksplisitte* differanseskjema

$$\frac{1}{k}(U_{i,j+1} - U_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}) + 5U_{i,j},$$

Dette gir

$$U_{i,j+1} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - \frac{11}{16}U_{i,j}, \tag{9}$$

der vi har benyttet at $k/h^2 = 1$ i vårt tilfelle.

Randbetingelsene gir at $U_{0,0} = U_{4,0} = 0$, $U_{1,0} = U_{3,0} = 3/4$ og $U_{2,0} = 1$. Innsatt for $i = 1,2$ og 3 og $j = 0$ i (9) får vi henholdsvis

$$U_{1,1} = \frac{31}{64} \quad U_{2,1} = \frac{13}{16} \quad \text{og} \quad U_{3,1} = \frac{31}{64}.$$

Det vil si, $u(1/4, 1/16) \approx U_{1,1} = 31/64$, $u(1/2, 1/16) \approx U_{2,1} = 13/16$ og $u(3/4, 1/16) = 31/64$.

7 Returverdien til `I(0.25,2)` er $5/6$.

Den eksakte verdien er

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Legg spesielt merke til at integranden i vårt tilfelle er et andregradspolynom.

Det oppgitte programmet er en implementasjon av Simpsons metode for det aktuelle integralet. Simpsons metode gir for en generell integrand $f(x)$ en tilnærming til

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ved å regne ut

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} p_{2,j}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\sum_{j=0}^{m-1}\left(f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})\right),$$

der $p_{2,j}(x)$ er et andregradspolynom som interpolerer $f(x)$ i punktene x_{2j}, x_{2j+1} og x_{2j+2} (med steglengde h), hvor $x_0 = a$ og $x_{2m} = b$.

I vårt tilfelle er $f(x) = p_{2,j}(x)$ for alle j, og vi får dermed at Simpsons metode gir den eksakte verdien for integralet.