Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Marius Thaule
Tlf: 73 59 35 30

Eksamensdato: 5. desember 2013
Eksamenstid (fra–til): 09.00–13.00
Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Rottmann, *Matematisk formelsamling*. Bestemt, enkel kalkulator.

Annen informasjon:
Formelliste følger vedlagt eksamensoppgavene.

Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål
Antall sider: 2
Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Bestem $f(t)$, gitt at

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \delta(t-1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

der δ betegner Diracs δ-funksjon.

Oppgave 2 Løs integralligningen

$$f(x) = e^{-2|x|} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|p|} f(x-p)\,\mathrm{d}p, \quad -\infty < x < \infty,$$

ved hjelp av fouriertransformasjon.

Oppgave 3

a) La funksjonen g være gitt ved

$$g(x) = \sin \pi x \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1.$$

La f være den 2-periodiske like (jevne) utvidelsen til g.

Vis at fourierrekken til f er gitt ved

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{4n^2 - 1}.$$

b) Finn de ikke-trivielle løsningene til den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

som kan skrives på formen

$$u(x,t) = F(x)G(t),$$

og som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \quad \text{for} \quad t \ge 0.$$

c) Finn en løsning av randverdiproblemet i **b)** som også tilfredstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin \pi x \quad \text{for} \quad 0 \le x \le 1.$$

Oppgave 4 Det oppgis at baklengs Euler for initialverdiproblemet

$$z'(x) = f\big(x, z(x)\big), \quad z(x_0) = z_0,$$

er gitt ved

$$z_{n+1} = z_n + h f(x_{n+1}, z_{n+1}).$$

Finn en tilnærming til $y(0{,}1)$, der

$$y'(x) = 2000x\big(10 - y(x)\big), \quad y(0) = 11,$$

ved hjelp av baklengs Euler med $h = 0{,}1$.

Oppgave 5 Gitt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

der A har LU-faktorisering

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Løs ligningssystemet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ved hjelp av LU-faktoriseringen til A.

Oppgave 6 Gitt den partielle differensialligningen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5u(x,t) && (0 < x < 1, t > 0) \\ u(0,t) &= u(1,t) = t && (t \geq 0) \\ u(x,0) &= 4x(1-x) && (0 \leq x \leq 1). \end{aligned}$$

Benytt en sentraldifferanse i rom (x-retning) med steglengde $h = 1/4$ og en foroverdifferanse i tid (t-retning) med steglengde $k = 1/16$, til å angi et *eksplisitt* differanseskjema og bruk dette til å finne en tilnærming til $u(1/4, 1/16)$, $u(1/2, 1/16)$ og $u(3/4, 1/16)$.

Oppgave 7 Integralet

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1)\,dx$$

regnes ut ved hjelp av følgende program implementert i `Python`.

```
def f(x):
    return x**2 - x + 1            # x**2 betyr x^2

def I(h,m):
    I = f(0) + f(1)
    for i in range (1,2*m):        # 1 <= i <= 2*m - 1
        if i % 2 == 0:             # i er partall
            I = I + 2*f(h*i)
        else:                      # i er oddetall
            I = I + 4*f(h*i)

    return (h/3)*I
```

Sammenlign returverdien til `I(0.25,2)` med den eksakte verdien til integralet, og forklar sammenhengen mellom de to verdiene.

Formelliste følger vedlagt på de to neste sidene.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\le n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\le n$:

$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over noen laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ (n=0,1,2,\ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over noen fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega)=\mathscr{F}\{f(x)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$
$g(x)=f(ax)$	$\hat{g}(\omega)=\frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\omega^2+a^2}$