Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
12. august 2013

Løsningsforslag

1 La funksjonen f være gitt ved $f(x) = e^{-x^2/2}$, og la $f_j = f(jh)$. Simpsons metode med $h = 0{,}125$ gir

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{0{,}125}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + 4f_7 + f_8) \approx 0{,}8556.$$

2 **a)** La funksjonen g være gitt ved $g(t) = e^{2t}(\cos t + 2\sin t)$. Initialverdiproblemet kan skrives som

$$y'(t) = e^{2t}\sin t + (g * y)(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0. \tag{1}$$

La $Y = \mathscr{L}(y)$. Ved å anvende laplacetransformasjon på (1) får vi

$$sY(s) = \frac{1}{(s-2)^2+1} + \left(\frac{s-2}{(s-2)^2+1} + \frac{2}{(s-2)^2+1}\right)Y(s).$$

Det vil si,

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-2)^2} \overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s-2} + \frac{2}{(s-2)^2}\right),$$

der vi har benyttet delbrøkoppspalting i overgangen $(*)$. Ved å ta inverstransformasjonen får vi

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}.$$

b) Funksjonen v kan uttrykkes som $v(t) = u(t-1)$, der u er enhetssprangfunksjonen. La $Y = \mathscr{L}(y)$. Laplacetransformasjon anvendt på differensialligningen gir

$$s^2Y(s) - s + \omega^2 Y(s) = \frac{1}{s}e^{-s}.$$

Det vil si,

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{s(s^2+\omega^2)}e^{-s} \overset{(**)}{=} \frac{s}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+\omega^2}\right)e^{-s},$$

der vi har benyttet delbrøkoppspalting i overgangen $(**)$. Ved å ta inverstransformasjonen får vi

$$y(t) = \cos\omega t + \frac{u(t-1)}{\omega^2}\left[1 - \cos\omega(t-1)\right].$$

3 Den komplekse fourierrekken til f er gitt ved

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

der

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \int_0^K e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} K & n = 0, \\ \frac{1}{in}(1-e^{-inK}) & n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Altså er den komplekse fourierrekken til f gitt ved

$$K + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in}(1-e^{-inK})e^{inx}.$$

4 La funksjonene y_1 og y_2 være gitt ved $y_1(x) = y(x)$, og $y_2(x) = y'(x)$. Det gir $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = -1$. La så

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

slik at differensialligningen kan skrives som et system av første ordens differensialligninger

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2y_1 - 3xy_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Eulers metode anvendt på (2) gir

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$$

der h er skrittlengden. Innsatt for $n = 0$ og $h = 0{,}1$ får vi

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + 0{,}1\,\mathbf{f}(0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0{,}1 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ -1{,}2 \end{bmatrix}.$$

Altså gir Eulers metode med $h = 0{,}1$ tilnærmingen $y(0{,}1) \approx 0{,}9$.

5 Gauss–Seidels iterasjonsmetode anvendt på ligningssystemet gir

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - z^{(0)}) = 0$$

$$y^{(1)} = \frac{1}{3}(2 + 2x^{(1)}) = \frac{2}{3}$$

$$z^{(1)} = \frac{1}{9}(9 - 2y^{(1)}) = \frac{23}{27}.$$

Iterasjonene vil konvergere da systemet er strengt diagonaldominant.

6

- `metodeEn` definerer funksjonen g som

  $$g(x) = \frac{1}{2}(x^4 - 1).$$

  Ettersom

  $$|g'(x)| = |2x^3| > 1 \quad \text{for} \quad 1 \le x \le 2$$

  kan vi ikke anvende teorem 1, side 797 i boken.

- `metodeTo` definerer funksjonen g som

  $$g(x) = \sqrt[4]{1 + 2x}.$$

  Ettersom

  $$|g'(x)| = \left| \frac{1}{2\,(1 + 2x)^{3/4}} \right| < 1 \quad \text{for} \quad 1 \le x \le 2$$

  vil denne metoden konvergere (se teorem 1, side 797 i boken). Utfører vi denne metoden får vi

  $$x_1 \approx 1{,}3944, \quad x_2 \approx 1{,}3952, \quad x_3 \approx 1{,}3953, \quad x_4 \approx 1{,}3953.$$

  Altså er løsningen til

  $$x^4 - 2x - 1 = 0$$

  i intervallet $[1, 2]$ til fem signifikante sifre tilnærmet lik 1,3953.

7 **a)** La funksjonen $\hat{u}$ være gitt ved å anvende fouriertransformasjon på u med hensyn på x,

$$\hat{u}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x.$$

Fra egenskapene til fouriertransformasjon får vi at

$$\mathcal{F}(u_{xx})=-\omega^2\hat{u}.$$

Fouriertransformasjon anvendt på den partielle differensialligningen gitt i oppgaven gir

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=-\omega^2\hat{u}.$$

Fouriertransformasjon anvendt på initialbetingelsen gir

$$\hat{u}_t(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u_t(x,0)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}=\hat{f}(\omega).$$

Altså kan vi, ved å anvende fouriertransformasjon, skrive det gitte problemet som initialverdiproblemet

$$\frac{\partial\hat{u}}{\partial t}=-\omega^2\hat{u},\quad \hat{u}_t(\omega,0)=\hat{f}(\omega). \tag{3}$$

b) Hvis vi fikserer ω kan vi skrive (3) som den ordinære differensialligningen

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t}=-\omega^2\hat{u},\quad \hat{u}_t(\omega,0)=\hat{f}(\omega),$$

som har løsning

$$\hat{u}(\omega,t)=C(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Fra $\hat{u}_t(\omega,0)=\hat{f}(\omega)$ får vi

$$\hat{u}_t(\omega,0)=-\omega^2C(\omega)=\hat{f}(\omega).$$

Altså er

$$\hat{u}(\omega,t)=-\frac{1}{\omega^2}\hat{f}(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Ettersom $\hat{f}=\mathcal{F}(g'')=-\omega^2\hat{g}$ forenkler dette seg til

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{g}(\omega)e^{-\omega^2 t}. \tag{4}$$

c) La funksjonen $\hat{h}$ være gitt ved

$$\hat{h}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\omega^2 t},$$

slik at (4) kan skrives som

$$\hat{u}(\omega,t)=\sqrt{2\pi}\,\hat{g}(\omega)\,\hat{h}(\omega,t). \tag{5}$$

Ved å ta inverstransformasjonen av (5) får vi

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}g(x-p)h(p,t)\,\mathrm{d}p,$$

der

$$h(p,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{h}(\omega,t)e^{i\omega p}\,\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{2t}e^{-\omega^2 t}e^{i\omega p}\,\mathrm{d}\omega\right)}_{e^{-p^2/4t}}=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}e^{-p^2/4t},\quad t>0,$$

hvor vi har benyttet den oppgitte fouriertransformasjonen (i formelarket)

$$\mathcal{F}\{e^{-ax^2}\}=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

med $a=1/4t$. Altså har vi at

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x-p)\,e^{-p^2/4t}\,\mathrm{d}p,\quad t>0.$$