Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Fagleg kontakt under eksamen:
Marius Thaule telefon 73 59 35 30 / 73 59 35 20

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D

Nynorsk
Måndag 12. august 2013
Tid: 09.00 – 13.00

Hjelpemiddel (kode C): Bestemt enkel kalkulator
Rottmann: *Matematisk formelsamling*

Sensur: 2. september 2013.

Alle svar skal grunngjevast. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Oppgåve 1 Finn ei tilnærming til integralet

$$\int_0^1 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

ved hjelp av Simpsons metode med skrittlengde $h = 1/8$.

Oppgåve 2

a) Løys initialverdiproblemet

$$y'(t) = e^{2t}\sin t + \int_0^t e^{2\tau}(\cos\tau + 2\sin\tau)\,y(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0,$$

ved hjelp av laplacetransformasjon.

b) La funksjonen v vere gitt ved

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 1 \\ 1 & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

Bruk laplacetransformasjon til å løyse differensiallikninga

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = v(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

der $\omega \neq 0$ er ein konstant.

Oppgåve 3 La den 2π-periodiske funksjonen f vere gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 2\pi & \text{for } 0 < x < K \\ 0 & \text{for } K < x < 2\pi, \end{cases}$$

der K er ein konstant mellom 0 og 2π.

Finn den komplekse fourierrekka til f.

Oppgåve 4 Finn ei tilnærming til $y(1/10)$ der

$$y''(x) + 3xy'(x) + 2y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

ved hjelp av Eulers metode med $h = 1/10$.

Oppgåve 5 Utfør ein iterasjon med Gauss–Seidels iterasjonsmetode på likningssystemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

med startverdiane $(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}) = (1, 1, 1)$.

Vil iterasjonane konvergere? Grunngi svaret.

Oppgåve 6 To metodar for å rekne ut ei løysing til likninga

$$x^4 - 2x - 1 = 0 \tag{$*$}$$

er implementert som følgjer i `Python`. Vi kan anta som kjent at likninga har ei løysing i intervallet $[1, 2]$.

```python
def metodeEin(N):
    x = 1.39

    def g(x):
        return 0.5*(x**4 - 1)           # x**4 betyr x^4

    for n in range(0, N):               # 0 <= n <= N- 1
        x = g(x)
    return x


def metodeTo(N):
    x = 1.39

    def g(x):
        return (1 + 2*x)**0.25          # (...)**0.25 betyr (...)^0.25

    for n in range(0, N):               # 0 <= n <= N- 1
        x = g(x)
    return x
```

Kva for ein av dei to metodane kan vi garantere at konvergerer mot løysinga? Grunngi svaret.

Bruk den metoden du mener konvergerer mot svaret og rekn ut løysinga til $(*)$ (til fem signifikante siffer) der du bruker same startverdi som i koden.

Oppgåve 7 I denne oppgåva ser vi på den partielle differensiallikninga

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

krava

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} u_x(x,t) = 0,$$

og startvilkåret

$$u_t(x,0) = f(x).$$

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = g''(x),$$

der g er ein to gonger deriverbar funksjon, og vi antar at dei fouriertransformerte til f og g eksisterer.

a) Vis at den partielle differensiallikninga gitt over kan skrivast, ved å anvende fouriertransformasjon, som initialverdiproblemet

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -\omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \qquad (*)$$

b) Ved å fiksere ω så kan vi skrive $(*)$ som den ordinære differensiallikninga

$$\frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 \hat{u}, \quad \hat{u}_t(\omega,0) = \hat{f}(\omega). \qquad (**)$$

Vis at $(**)$ har løysing

$$\hat{u}(\omega,t) = \hat{g}(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

c) Vis at løysinga til problemet kan skrivast på forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-p)h(p,t)\,\mathrm{d}p \quad \text{for} \quad t > 0,$$

og finn $h(p,t)$.

Formelliste følgjer vedlagt på dei to neste sidene.

Formlar i numerikk

- La $p(x)$ vere eit polynom av grad $\le n$ som interpolerer $f(x)$ i punkta x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dersom at x og alle nodane ligg i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\le n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ + \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for likningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikkar for løysing av eit lineært likningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\Big)$$

- Heuns metode for løysing av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over nokre laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over nokre fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$