Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Helge Holden[a], Gard Spreemann[b]

Tlf: [a] 92038625 , [b] 93838503

Eksamensdato: 2. desember 2014

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt enkel kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Formelliste følger vedlagt eksamensoppgavene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Løs ligningen

$$y(t) - 2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sin t \qquad \text{for } t \geq 0$$

ved hjelp av Laplace-transformasjon.

Oppgave 2

a) Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende punkter:

n	0	1	2
x_n	-1	0	1
y_n	e^{-1}	1	e^{-1}

(Her er e Euler-tallet, altså $e = \exp(1) = 2{,}71828\ldots$.)

b) La p betegne polynomet fra **2a**. Beregn

$$I = \int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x,$$

og vis at

$$\left| I - \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{2}{15}.$$

Oppgave 3 Bestem ved hjelp av Fourier-transformasjon funksjonen f som oppfyller

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4y^2} f(x-y)\,\mathrm{d}y = e^{-2x^2} \qquad \text{for } -\infty < x < \infty.$$

Oppgave 4

a) La f være den 2π-periodiske funksjonen definert av

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } -\pi \leq x \leq 0 \\ x & \text{for } 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Vis at Fourier-rekken til $f(x)$ er

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos((2m-1)x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

b) Finn summen av rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi^2 (2n-1)^4} + \frac{1}{n^2} \right).$$

Oppgave 5 Vi skal studere den modifiserte varmeledningsligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - u(x,t) \qquad \text{for } 0 \le x \le 1 \text{ og } t \ge 0. \tag{1}$$

a) Finn alle ikke-trivielle løsninger av ligning (1) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0,t) = 0 = u(1,t) \tag{2}$$

for alle $t \ge 0$.

b) Finn løsningen av ligning (1) som i tillegg til randbetingelsene (2) også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin(\pi x)\cos(\pi x). \tag{3}$$

(Hint: Du kan spare tid ved å bruke trigonometriske identiteter for å omskrive $\sin(\pi x)\cos(\pi x)$.)

c) Sett opp et differensskjema med sentraldifferens i rom og fremoverdifferens i tid for numerisk løsning av ligning (1) med randbetingelsene (2) og initialbetingelsen (3). Med skrittlengder h og k, kaller vi den numeriske tilnærmingen til $u(ih, jk)$ for $U_{i,j}$.

Bruk skrittlengder $h = 1/4$ og $k = 1/32$ og regn ut

$$|u(3/4, 1/32) - U_{3,1}|.$$

Oppgave 6 Følgende Python-kode er gitt:

```
def f(x, y):
    return -1000.0*y

def matte4(h, N):
    x = 0.0
    y = 1.0
    for n in range(1, N+1):        # 1 <= n <= N
        k1 = h*f(x, y)
        k2 = h*f(x + h, y + k1)
        x = n*h
        y = y + 0.5*(k1 + k2)

    return y
```

Funksjonen `matte4` implementerer en metode for numerisk løsning av den ordinære differensialligningen

$$y'(x) = -1000y(x) \tag{4}$$

med initialbetingelse $y(0) = 1$. Hvilken metode er det som er implementert?

Ligning (4) har som kjent analytisk løsning $y(x) = e^{-1000x}$, og det er klart at $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$. La y_N betegne returverdien til `matte4(h, N)`. Vis at

$$y_N = \left(1 - 1000h + \frac{10^6}{2}h^2\right)^N y_0$$

og forklar hvor stor h kan være for at vi kan være sikker på at

$$\lim_{N\to\infty} y_N = 0.$$

Nevn en alternativ metode hvor du kan si noe om den numeriske løsningen av ligning (4) for svært store N uansett hva $h > 0$ er. Begrunn svaret.

Formelliste følger som vedlegg.

Formler i numerikk

- La $p(x)$ være et polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punktene $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Forutsatt at x og alle nodene ligger i intervallet $[a, b]$, så gjelder

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}[f(x+h) - f(x)] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}[f(x+h) - f(x-h)] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for ligningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikker for løsning av et lineært ligningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

- Heuns metode for løsning av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k}_2 &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \end{aligned}$$

Tabell over noen laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over noen fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\ \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$