NTNU
Institutt for matematiske fag

Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
15. august 2014

Løsningsforslag

1 Kjøring av `iterasjonEn(0.1,0.1,0.1,1)` gir $x_1 = 1{,}60$, $y_1 = 0{,}50$ og $z_1 = 1{,}26$.

Kjøring av `iterasjonTo(0.1,0.1,0.1,1)` gir $x_1 = 1{,}60$, $y_1 = -5{,}30$ og $z_1 = -17{,}3$.

Både `iterasjonEn` og `iterasjonTo` er en implementasjon av Gauss–Seidels iterasjonsmetode. Forskjellen ligger i at `itearsjonEn` løser ut for x, y og z for henholdsvis ligning 1, 2 og 3 i det oppgitte ligningssystemet, mens `iterasjonTo` løser ut for x, y og z for henholdsvis ligning 1, 3 og 2 i det oppgitte ligningssystemet.

Da det oppgitte ligningssystemet er strengt diagonaldominant, kan vi slutte at `iterasjonEn` vil konvergere. Ettersom `iterasjonTo` bytter om på ligning 2 og 3 i det oppgitte ligningssystemet vil ikke dette lenger være et strengt diagonaldominant system. (Det at systemet ikke lenger er strengt diagonaldominant er ikke nok til å konkludere med at `iterasjonTo` ikke vil konvergere. Det kan vises, ved å regne ut den såkalte spektralradien til koeffisientmatrisen til ligningssystemet `iterasjonTo` tar utgangspunkt i, at `iterasjonTo` ikke vil konvergere.)

2 Vi ser på ligningssystemet

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1,x_2) \\ f_2(x_1,x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x_1 + e^{-x_2} - 2 \\ x_1 + (x_2+3)^2 - 4 \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

der

$$\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(0)}\big) = \mathbf{f}(0, 0{,}5) = \begin{bmatrix} e^{-0{,}5} - 1 \\ 33/4 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0{,}3935 \\ 8{,}2500 \end{bmatrix}.$$

Jacobimatrisen til $\mathbf{f}$ er gitt ved

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin x_1 & -e^{-x_2} \\ 1 & 2(x_2+3) \end{bmatrix},$$

som gir

$$J^{(0)} = J(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-0{,}5} \\ 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Én iterasjon med Newtons metode gir

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)},$$

hvor

$$J^{(0)}\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & -e^{-0{,}5} \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(0)} \\ \Delta x_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - e^{-0{,}5} \\ -33/4 \end{bmatrix} = -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(0)}\big),$$

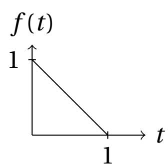
som har løsning

$$\Delta x_1^{(0)} \approx -3{,}7090 \qquad \text{og} \qquad \Delta x_2^{(0)} = 1 - e^{0{,}5} \approx -0{,}6487.$$

Altså er

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)} \approx \begin{bmatrix} -3{,}7090 \\ -0{,}1487 \end{bmatrix}.$$

3 **a)** En skisse av grafen til f:



Vi observerer at $f(t) = (1-t)[1-u(t-1)] = 1-t+(t-1)u(t-1)$, der u er enhetssprangfunksjonen. Laplacetransformen til f er så gitt ved

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}e^{-s} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

der vi har benyttet tabellen i formelarket, samt andre forskyvningsteorem.

b) La $Y = \mathscr{L}(y)$. Laplacetransformasjon anvendt på den oppgitte differensialligningen gir

$$(s-1)Y(s) = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}\right)$$

der vi har benyttet resultatet fra **a)**. Ved å løse ut for $Y(s)$ får vi

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{s}e^{-s}\right) \overset{(*)}{=} \frac{1}{s^2} + \left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right)e^{-s} \tag{1}$$

hvor overgangen $(*)$ fremkommer ved å benytte delbrøkoppspalting. Inverstransformasjon anvendt på (1) gir så

$$y(t) = t + [e^{t-1} - t]u(t-1),$$

der vi har benyttet andre forskyvningsteorem.

$\boxed{4}$ **a)** I vårt tilfelle er $L = 1$ slik at

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\\
a_k &= \int_{-1}^{1} f(x)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\cos k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= \underbrace{\left[\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 x\cos k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= -\Bigg(\underbrace{\left[\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right]_0^1}_{=0} - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x\,\mathrm{d}x\Bigg) = \frac{1}{k\pi}\left[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1\\
&= \frac{1}{k^2\pi^2}(1-\cos k\pi) = \begin{cases} 2/k^2\pi^2 & \text{for } k = 1,3,5,\dots\\ 0 & \text{for } k = 2,4,6,\dots\end{cases}\\
b_k &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin k\pi x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\sin k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= \underbrace{\left[-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1}_{=(1+(-1)^{k+1})/k\pi} - \int_0^1 x\sin k\pi x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{k\pi}(1+(-1)^{k+1}) - \Bigg(\underbrace{\left[-\frac{x}{k\pi}\cos k\pi x\right]_0^1}_{=(-1)^{k+1}/k\pi} + \frac{1}{k\pi}\underbrace{\int_0^1 \cos k\pi x\,\mathrm{d}x}_{=0}\Bigg) = \frac{1}{k\pi} \quad \text{for } k = 1,2,3,\dots
\end{aligned}$$

Dermed er fourierrekken til f gitt ved

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x + b_n \sin n\pi x) = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}.$$

b) Vi er oppgitt at $f(-1) = f(1) = 0$, slik at

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi + b_n\sin n\pi) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = f(1) = 0,$$

hvor vi har utnyttet at funksjonen er kontinuerlig i $x = 1$. Dermed er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

5 Den retningsderiverte er størst i retningen til gradienten. I vårt tilfelle er

$$\nabla f\big|_{(x,y)} = \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, 3e^{3y}\right).$$

Spesielt er $\nabla f\big|_{(\pi,0)} = (0,3)$.
Den retningsderiverte til f i retningen $\mathbf{u}$ er gitt ved

$$D_{\mathbf{u}} f(x,y) = \mathbf{u}\cdot \nabla f\big|_{(x,y)},$$

og er størst når $\mathbf{u}$ er parallell ($\theta = 0$) med $\nabla f\big|_{(x,y)}$. I vårt tilfelle gir det $\mathbf{u} = (0,1)$ slik at

$$D_{\mathbf{u}} f(\pi,0) = \mathbf{u}\cdot \nabla f\big|_{(\pi,0)} = 3.$$

6 **a)** Innsatt for $u(x,t) = F(x)G(t)$ i $u_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) - 2u_t(x,t) - u(x,t) = 0$ får vi

$$F''(x)G(t) - F(x)\ddot{G}(t) - 2F(x)\dot{G}(t) - F(x)G(t) = 0.$$

Det vil si,

$$\underbrace{\frac{F''(x)}{F(x)}}_{k} = \underbrace{\frac{\ddot{G}(t) + 2\dot{G} + G(t)}{G(t)}}_{k},$$

som gir to ordinære differensialligninger

$$F''(x) - kF(x) = 0 \tag{2}$$
$$\ddot{G}(t) + 2\dot{G}(t) + (1-k)G(t) = 0. \tag{3}$$

Randbetingelsene $u(0,t) = 0$ og $u(\pi,t) = 0$ for alle t gir at

$$F(0) = F(\pi) = 0. \tag{4}$$

Vi har tre muligheter for konstanten k: (i) $k > 0$, (ii) $k = 0$ og (iii) $k < 0$.

(i) Innsatt for $k = \mu^2 > 0$ i (2) får vi $F''(x) - \mu^2 F(x) = 0$ som har løsning $F(x) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}$. Fra (4) kan vi slutte at $A = B = 0$, og dermed at $F(x) = 0$, som kun gir den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

(ii) Innsatt for $k = 0$ i (2) får vi $F''(x) = 0$ som har løsning $F(x) = Ax + B$. Fra (4) kan vi slutte at $A = B = 0$, og dermed at $F(x) = 0$, som kun gir den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$.

(iii) Innsatt for $k = -p^2 < 0$ i (2) får vi $F''(x) + p^2F(x) = 0$ som har løsning $F(x) = A\cos px + B\sin px$. Fra $F(0) = 0$ får vi at $A = 0$. Fra $F(\pi) = 0$ får vi at $B = 0$ eller $p = n = 1,2,3,\ldots$. Tilfellet $B = 0$ gir kun den trivielle løsningen $u(x,t) = 0$. Altså har vi at

$$F_n(x) = \tilde{B}_n \sin nx$$

for $n = 1,2,3,\ldots$.
Innsatt for $k = -n^2$ i (3) får vi $\ddot{G}(t) + 2\dot{G}(t) + (1+n^2)G(t) = 0$ som har løsning

$$G_n(t) = \hat{A}_n e^{-t}\cos nt + \hat{B}_n e^{-t}\sin nt$$

for $n = 1,2,3,\ldots$ der vi har gjort bruk av vinket gitt i oppgaven.
Altså gir $k < 0$ den ikke-trivielle løsningen

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = (A_n e^{-t}\cos nt + B_n e^{-t}\sin nt)\sin nx$$

for $n = 1,2,3,\ldots$ og der $A_n = \tilde{B}_n\hat{A}_n$ og $B_n = \tilde{B}_n\hat{B}_n$.

b) La

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{-t}\cos nt + B_n e^{-t}\sin nt)\sin nx.$$

Fra $u(x,0) = 0$ får vi

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx = 0,$$

slik at $A_n = 0$ for $n = 1, 2, 3, \dots$
Dermed er

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-t} \sin nt \sin nx$$

slik at

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n (n \cos nt - \sin nt) e^{-t} \sin nx.$$

Fra $u_t(x,0) = 2\sin x - \sin 2x$ får vi

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \sin nx = B_1 \sin x + 2B_2 \sin 2x + \cdots = 2\sin x - \sin 2x.$$

Det vil si, $B_1 = 2$, $B_2 = -1/2$ og $B_n = 0$ for $n = 3, 4, 5, \dots$ Det gir

$$u(x,t) = 2e^{-t} \sin t \sin x - \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t \sin 2x.$$

$\boxed{7}$ La $y_1 = y$ og $y_2 = y'$. Det gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) & \qquad y_1(0) &= 0 \\ y_2'(x) &= \frac{1}{2}[x + y_1(x) + y_2(x) + 2] & \qquad y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Heuns metode er gitt ved

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

I vårt tilfelle, for $n = 0$, er

$$\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_0, \mathbf{y}_0) = h \begin{bmatrix} y_{2,0} \\ \frac{1}{2}[x_0 + y_{1,0} + y_{2,0} + 2] \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og

$$\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_0 + h, \mathbf{y}_0 + \mathbf{k}_1) = h \begin{bmatrix} h \\ h+1 \end{bmatrix}.$$

Dermed er

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{1}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} h^2 \\ h^2 + 2h \end{bmatrix}.$$

Innsatt for $h = 0{,}2$ får vi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}02 \\ 0{,}22 \end{bmatrix}.$$

Altså gir Heuns metode med $h = 0{,}2$ at $y(0{,}2) \approx 0{,}02$.