Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **TMA4135 Matematikk 4D**

Fagleg kontakt under eksamen: Gard Spreemann

Tlf: 73 55 02 38

Eksamensdato: 15. august 2014

Eksamenstid (frå–til): 09.00–13.00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: C: Rottmann, *Matematisk formelsamling*. Bestemt, enkel kalkulator.

Annan informasjon:
Formelliste følgjer vedlagt eksamensoppgåvene.

Alle svar skal grunngjevast. Det skal vere med så mykje mellomrekning at framgangsmåten går tydeleg fram.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgåve 1 Likningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + \quad y + \quad z &= 5 \\ x + 3y - \quad z &= 3 \\ 3x + \quad y - 5z &= -1 \end{aligned}$$

er løyst ved to iterasjonsmetodar i `Python`.

```
def iterasjonEin(x0,y0,z0,n):
    x = x0
    y = y0
    z = z0

    for i in range(0,n):                    #  0 <= i < n
        x = 1.0/3.0*(5.0 - y - z)
        y = 1.0/3.0*(3.0 - x + z)
        z = 1.0/5.0*(1.0 + 3.0*x + y)
    return x,y,z

def iterasjonTo(x0,y0,z0,n):
    x = x0
    y = y0
    z = z0

    for i in range(0,n):                    # 0 <= i < n
        x =  1.0/3.0*(5.0 - y - z)
        y = -1.0 - 3.0*x + 5.0*z
        z = -3.0 + x + 3.0*y
    return x,y,z
```

Gjer éin iterasjon med kvar av metodane med $x_0 = y_0 = z_0 = 0{,}1$.

Kva for ein iterasjonsmetode er det som er implementert? Kva kan vi sei om konvergensen til disse metodane?

Oppgåve 2 Gjer éin iterasjon med Newtons metode på likningssystemet

$$\begin{aligned} \cos x_1 + e^{-x_2} - 2 &= 0, \\ x_1 + (x_2 + 3)^2 - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Bruk $x_1^{(0)} = 0$ og $x_2^{(0)} = 0{,}5$ som startverdiar.

Oppgåve 3

a) Skissér grafen og finn laplacetransformasjonen, $\mathscr{L}(f)$, for funksjonen

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{for } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{for } t > 1. \end{cases}$$

b) Løys differensiallikninga

$$y'(t) - y(t) = f(t), \qquad y(0) = 0,$$

ved hjelp av laplacetransformasjon.

Oppgåve 4 La f vere den 2-periodiske funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } \; -1 \le x \le 0, \\ 1 - x & \text{for } \; 0 < x < 1. \end{cases}$$

a) Vis at fourierrekka til f er gitt ved

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}.$$

b) Bruk resultatet i **a)** til å bestemme summen av rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Oppgåve 5 La f vere funksjonen gitt ved

$$f(x, y) = \sin\frac{x}{2} + e^{3y}.$$

I kva for ei retning er den retningsderiverte til f i punktet $(\pi, 0)$ størst?

Rekn ut den retningsderiverte i denne retninga.

Oppgåve 6 Gitt den partielle differensiallikninga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t} - u = 0 \tag{1}$$

og randkrava

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{for alle } t. \tag{2}$$

a) Vis at alle løysinger av (1) på forma $u(x, t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller (2) er gitt ved

$$u_n(x, t) = \left(A_n e^{-t} \cos nt + B_n e^{-t} \sin nt\right) \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

der A_n og B_n er vilkårlege konstantar.

(Vink: Differensiallikninga $y''(t) + 2y'(t) + (1 + p^2)y(t) = 0$, p ein konstant, har generell løysing $y(t) = ae^{-t} \cos pt + be^{-t} \sin pt$, a og b konstantar.)

b) Finn ei løysing av (1) som tilfredsstiller (2) og som i tillegg også oppfyller

$$u(x, 0) = 0, \quad \text{og} \quad u_t(x, 0) = 2\sin x - \sin 2x$$

for alle x.

Oppgåve 7 Finn ei tilnærming til $y(0{,}2)$, der

$$y''(x) = \frac{1}{2}\left[x + y(x) + y'(x) + 2\right], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

ved hjelp av Heuns metode med $h = 0{,}2$.

Formelliste følgjer vedlagt på dei to neste sidene.

Formlar i numerikk

- La $p(x)$ vere eit polynom av grad $\leq n$ som interpolerer $f(x)$ i punkta $x_i, i = 0, 1, \ldots, n$. Dersom x og alle nodane ligg i intervallet $[a, b]$, så gjeld

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i), \quad \xi \in (a, b).$$

- Newtons dividerte differansers interpolasjonspolynom $p(x)$ av grad $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

- Numerisk derivasjon:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{h}\big[f(x+h) - f(x)\big] + \frac{1}{2} h f''(\xi) \\ f'(x) &= \frac{1}{2h}\big[f(x+h) - f(x-h)\big] - \frac{1}{6} h^2 f'''(\xi) \\ f''(x) &= \frac{1}{h^2}\big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\big] - \frac{1}{12} h^2 f^{(4)}(\xi) \end{aligned}$$

- Simpsons integrasjonsformel:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newtons metode for likningssystemet $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ er gitt ved

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iterative teknikkar for løysing av eit lineært likningssystem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\text{Jacobi:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \Big(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \Big)$$

- Heuns metode for løysing av $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k_1} &= h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) \\ \mathbf{k_2} &= h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k_1}) \\ \mathbf{y}_{n+1} &= \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2}) \end{aligned}$$

Tabell over nokre laplacetransformasjoner

$f(t)$	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Tabell over nokre fouriertransformasjoner

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathscr{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$