Norges
Teknisk–Naturvitenskapelige
Universitet
Institutt for Matematiske Fag

Løsningsforslag for eksamen
10. desember 2015

$\boxed{1}$ Hvis $f(t) = e^t$, er ligningen i oppgaven

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2 - (y * f)(t).$$

Med $Y = \mathscr{L}(y)$ og $F(s) = \mathscr{L}(f)(s) = 1/(s-1)$ får vi ved bruk av initialbetingelsene

$$s^2Y(s) - s + sY(s) - 1 + Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{Y(s)}{s-1}$$

siden $\mathscr{L}(y * f) = YF$. Dette forenkler vi til

$$\begin{aligned}
\left(s^2 + s + 1 + \frac{1}{s-1}\right)Y(s) &= s + 1 + \frac{2}{s^3} \\
\frac{s^3}{s-1}Y(s) &= s + 1 + \frac{2}{s^3} \\
Y(s) &= \frac{(s-1)(s+1)}{s^3} + \frac{2(s-1)}{s^6} \\
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} + \frac{2}{s^5} - 2\frac{1}{s^6},
\end{aligned}$$

som invers-transformerer til

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{12} - \frac{t^5}{60}.$$

$\boxed{2}$ Fra formelarket eller tabeller vet vi at

$$\mathscr{F}(f_a)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\omega^2/(4a)}.$$

Fouriertransformasjonen tar konvolusjon til produkt, så

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}(f_a * f_b)(\omega) &= \sqrt{2\pi}\mathscr{F}(f_a)(\omega)\mathscr{F}(f_b)(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2ab}}e^{-\left(\frac{1}{4a}+\frac{1}{4b}\right)\omega^2} \\
&= \sqrt{\frac{2c\pi}{2ab}}\sqrt{\frac{1}{2c}}e^{-\omega^2/(4c)} = \sqrt{\frac{c\pi}{ab}}\mathscr{F}(f_c)(\omega),
\end{aligned}$$

hvor

$$\frac{1}{4c} = \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b},$$

altså

$$c = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} = \frac{ab}{a+b}.$$

Inverstransformasjon gir

$$(f_a * f_b)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} f_c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a+b}} e^{-abx^2/(a+b)}.$$

$\boxed{3}$ **a)** Skriv

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$

altså

$$A = LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix},$$

som med Doolittles metode (Kreyszig s. 850) gir

$$\begin{aligned} u_{11} &= 3, \\ u_{12} &= 9, \\ u_{13} &= 6, \\ m_{21}u_{11} &= 18, \\ m_{21}u_{12} + u_{22} &= 48, \\ m_{21}u_{13} + u_{23} &= 39, \\ m_{31}u_{11} &= 9, \\ m_{31}u_{12} + m_{32}u_{22} &= -27, \\ m_{31}u_{13} + m_{32}u_{23} + u_{33} &= 42. \end{aligned}$$

Dermed er

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ er ekvivalent med (se Kreyzsig s. 850)

$$L\mathbf{y} = \mathbf{b}, \quad U\mathbf{x} = \mathbf{y},$$

og å løse hver av disse ligningene kan gjøres betydelig raskere enn den opprinnelige ligningen.
Vi finner at

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 21 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ved å løse $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$. Videre løser vi $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ og finner

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

4 Siden f er odde, er dens Fourier-rekke på formen

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

med

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{x}{n} \cos nx \right]_{n=0}^{x=\pi} \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

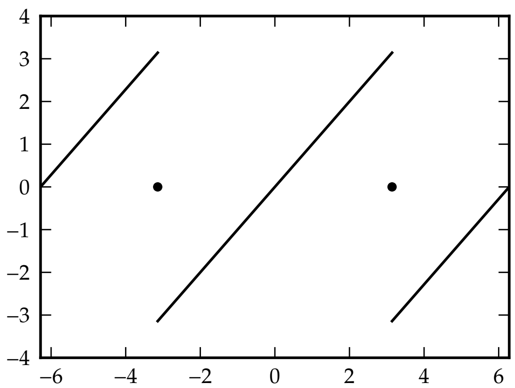
altså

$$S(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

f er diskontinuerlig i π, så

$$S(\pi) = \frac{1}{2} \left(\lim_{x \to \pi^+} f(x) + \lim_{x \to \pi^-} f(x) \right) = \frac{1}{2}(-\pi + \pi) = 0.$$

Grafen til S på $[-2\pi, 2\pi]$ er vist i figur 1.



Figur 1: Grafen til S fra oppgave 4. Prikkene er $(\pm\pi, S(\pm\pi))$.

5 **a)** $u(x,t) = F(x)G(t)$ innsatt i PDE-en gir

$$F''(x)G(t) + 4F(x)G(t) = F(x)G'(t),$$

som blir

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \frac{G'(t)}{G(t)} - 4.$$

Siden venstre side er uavhengig av t og høyre side er uavhengig av x, er begge sider lik en konstant k. Dette gir oss to ODE-er:

$$F''(x) - kF(x) = 0 \tag{1}$$

$$G'(t) - (k+4)G(t) = 0. \tag{2}$$

Vi betrakter først ligning (1). Dersom $k > 0$, er dens løsninger på formen

$$F(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}.$$

Venstre randbetingelse gir $0 = u(0,t) = F(0)G(t)$ for alle t, som gir $0 = F(0) = A + B$, altså $A = -B$, så

$$F(x) = A(e^{\sqrt{k}x} - e^{-\sqrt{k}x}).$$

Nå er $F'(x) = \sqrt{k}A(e^{\sqrt{k}x} + e^{-\sqrt{k}x})$, så høyre randbetingelse gir $0 = F'(\pi)$, som gir $A = 0$. Tilfellet $k > 0$ gir altså bare trivielle løsninger.
Hvis $k = 0$, er løsningene av ligning (1) på formen

$$F(x) = Ax + B.$$

Venstre randbetineglse gir $0 = F(0) = B$, altså $F(x) = Ax$, mens høyre randbetingelse gir $0 = F'(\pi) = A$, så også dette tilfellet gir kun trivielle løsninger.
Hvis $k < 0$, er løsningene av ligning (1) på formen

$$F(x) = A\cos\sqrt{-k}x + B\sin\sqrt{-k}x.$$

Venstre randbetingelse gir $0 = F(0) = A$, altså $F(x) = B\sin\sqrt{-k}x$. Da er $F'(x) = \sqrt{-k}B\cos\sqrt{-k}x$, så høyre randbetingelse gir

$$0 = F'(\pi) = \sqrt{-k}B\cos\sqrt{-k}\pi.$$

For å unngå triviell løsning ($B = 0$), kan vi velge $\sqrt{-k} = n/2$ for $n = 1, 3, 5, \ldots$.
Løsning av ligning (1) er altså

$$F_n(x) = B_n \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$$

for $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Med $k = -(2n-1)^2/4$ er løsning av ligning (2)

$$G_n(t) = A_n e^{(4-(2n-1)^2/4)t}.$$

Generell løsning av PDE-en er derfor

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)G_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(4-(2n-1)^2/4)t} \sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right).$$

b) Initialbetingelsen gir

$$\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\sin\left(\frac{5}{2}x\right) + 3\sin\left(\frac{7}{2}x\right) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx.$$

Med andre ord er $C_1, C_2, \ldots$ Fourier-sinus-koeffisientene til funksjonen på venstre side i ligningen over. Disse kan regnes ut på vanlig måte, eller vi kan lese dem av direkte siden venstre side allerede er en Fourier-sinus-rekke:

$$C_2 = 1, \quad C_3 = 2, \quad C_4 = 3$$

og $C_n = 0$ ellers.
Løsningen vi søker er derfor

$$u(x,t) = e^{7t/4}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 2e^{-9t/4}\sin\left(\frac{5}{2}x\right) + 3e^{-33t/4}\sin\left(\frac{7}{2}x\right).$$

c) (Besvarelsen er her mye mer ordrik enn det som kreves på eksamen. Den er kopiert fra LF til øving 12, med de nødvendige modifikasjoner.)

Vi går frem som i forelesningene og `http://www.math.ntnu.no/emner/TMA4135/2015h/notater/crank-nicolson/cn.pdf`. Notatet håndterer jo egentlig den vanlige varmeledningsligningen, altså den uten en ekstra $4u(x,t)$, men fremgangsmåten er *nøyaktig den samme!*

Del $[0,\pi]$ inn i intervaller med noder $x_0, x_1, \dots, x_N$ i en avstand h fra hverandre, altså $h = \pi/N$. Ved å bruke *sentraldifferenstilnærmingen*[1],

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x,t) \approx \frac{1}{h^2}(u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)),$$

forvandler vi PDE-en fra oppgaven til et system av ligninger

$$\frac{\partial u}{\partial t}(ih,t) \approx \frac{1}{h^2}(u(ih+h,t) - 2u(ih,t) + u(ih-h,t)) + 4u(ih,t) \qquad \text{for } 0 < i < N.$$

Hvis vi skriver $v_i(t)$ for vår tilnærming av $u(ih,t)$, kan dette systemet skrives

$$v'_i(t) = \frac{1}{h^2}(v_{i+1}(t) - 2v_i(t) + v_{i-1}(t)) + 4v_i(t) \qquad \text{for } 0 < i < N.$$

Med denne notasjonen blir randbetingelsene $v_0(t) = u(0,t) = 0$ og $v_N(t) = u(Nh,t) = u(\pi,t) = 0$.

Med $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots v_{N-1}(t))$ kan vi skrive systemet som

$$\mathbf{v}'(t) = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} v_2(t) - 2v_1(t) \\ v_3(t) - 2v_2(t) + v_1(t) \\ \vdots \\ v_{N-1}(t) - 2v_{N-2}(t) + v_{N-3}(t) \\ -2v_{N-1}(t) + v_{N-2}(t) \end{pmatrix} + 4\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{v}(t)). \tag{3}$$

Ligning (3) kan løses med en hvilken som helst Runge–Kutta-metode for systemer av ODE-er. Crank–Nicolson metode fås fra RK-metoden som har Butcher-tabell

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

Skriv k for tidsskrittlegnden, og tidsskrittindeks som superskript (altså $\mathbf{v}^j \approx \mathbf{v}(jk)$). Da er denne metoden

$$\mathbf{v}^{j+1} = \mathbf{v}^j + \frac{k}{2}\mathbf{f}(t_j, \mathbf{v}^j) + \frac{k}{2}\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{v}^{j+1}).$$

[1] Som i forelesningene: legg sammen Taylor-rekken for $u(x+h,t)$ og for $u(x-h,t)$ slik at de odde potensene av h forsvinner, og se bort ifra ledd av orden større enn h^2.

Anvendt med **f** fra ligning (3) får vi

$$\begin{pmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j+1} \\ v_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^{j} \\ v_2^{j} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j} \\ v_{N-1}^{j} \end{pmatrix} + \frac{k}{2h^2}\begin{pmatrix} v_2^j - 2v_1^j \\ v_3^j - 2v_2^j + v_1^j \\ \vdots \\ v_{N-1}^j - 2v_{N-2}^j + v_{N-3}^j \\ -2v_{N-1}^j + v_{N-2}^j \end{pmatrix} + 2k\begin{pmatrix} v_1^{j} \\ v_2^{j} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j} \\ v_{N-1}^{j} \end{pmatrix}$$
$$+ \frac{k}{2h^2}\begin{pmatrix} v_2^{j+1} - 2v_1^{j+1}) \\ v_3^{j+1} - 2v_2^{j+1} + v_1^{j+1} \\ \vdots \\ v_{N-1}^{j+1} - 2v_{N-2}^{j+1} + v_{N-3}^{j+1} \\ -2v_{N-1}^{j+1} + v_{N-2}^{j+1} \end{pmatrix} + 2k\begin{pmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j+1} \\ v_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix}.$$

Omformer vi til en matriseligning, og innfører $r = k/h^2$, får vi det tridiagonale ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 1+r-2k & -r/2 & & & \\ -r/2 & 1+r-2k & -r/2 & & \\ & -r/2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -r/2 \\ & & & -r/2 & 1+r-2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{j+1} \\ v_2^{j+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j+1} \\ v_{N-1}^{j+1} \end{pmatrix}$$
$$= (1+2k)\begin{pmatrix} v_1^{j} \\ v_2^{j} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{j} \\ v_{N-1}^{j} \end{pmatrix} + \frac{r}{2}\begin{pmatrix} v_2^j - 2v_1^j \\ v_3^j - 2v_2^j + v_1^j \\ \vdots \\ v_{N-1}^j - 2v_{N-2}^j + v_{N-3}^j \\ -2v_{N-1}^j + v_{N-2}^j \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Vi skritter fra tidsskritt j til $j+1$ ved å løse dette systemet.

6 Funksjonene utfører henholdsvis iterasjonene $x_{n+1} = g_1(x_n)$ og $x_{n+1} = g_2(x_n)$ med $g_1(x) = -\ln x$ og $g_2(x) = e^{-x}$, begge med start i $x_0 = 1/2$. Da har vi at

$$s \text{ er et fikspunkt for } g_1 \iff s = -\ln s \iff e^{-s} = s \iff s \text{ er et fikspunkt for } g_2,$$

så fikspunkt for begge funksjonene er løsning av ligningen i oppgaven. Siden $g_1'(x) = -1/x$, er $|g_1'(1/2)| = 2 > 1$, så derfor er ikke x_0 i noe intervall hvor g_1 er en kontraksjon. Dette utelukker `metodeEn`.

Se på den kontinuerlige funksjonen f definert ved $f(x) = g_2(x) - x$. Siden $f(1/2) > 0$ og $f(\ln 2) < 0$, gir mellomverdisetningen at f har et nullpunkt i $I = [1/2, \ln 2]$, som betyr at g_2 har et fikspunkt i I. Videre er $g_2'(x) = -e^{-x}$, så maksimum for $|g_2'|$ på I er $|g_2'(1/2)| < 1$. Det er også klart at $g_2(x) \in I$ for alle $x \in I$, så g_2 er en kontraksjon på I. Derfor konvergerer fikspunktiterasjon med g_2, altså `metodeTo`, til ønsket løsning når $x_0 = 1/2 \in I$.