NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Helge Holden[a], Gard Spreemann[b]

Tlf: [a] 92038625 , [b] 93838503

Eksamensdato: 10. desember 2015

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkelt kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes. Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.

Et formelark er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Bruk Laplace-transformasjon for å løse integro-differensialligningen

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2 - \int_0^t y(\tau)e^{t-\tau}\,\mathrm{d}\tau, \qquad t \geq 0$$

med initialbetingelsene $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$.

Oppgave 2 La $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f_a(x) = e^{-ax^2}.$$

Regn ut konvolusjonen $f_a * f_b$ med $a > 0$ og $b > 0$ konstanter.

Oppgave 3

a) Du er gitt matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 18 & 48 & 39 \\ 9 & -27 & 42 \end{pmatrix}.$$

Regn ut LU-faktoriseringen av A, altså

$$A = LU$$

hvor U er en øvre-triangulær matrise og L er en nedre-triangulær matrise med bare 1 på diagonalen.

b) Vis hvordan du kan bruke LU-faktoriseringen for å løse ligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

for en gitt vektor $\mathbf{b}$.

Bruk LU-faktoriseringen for å løse ligning (1) når

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 171 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4 La f være den 2π-periodiske funksjonen definert av $f(x) = x$ for $-\pi < x < \pi$. Finn Fourier-rekken til f. La $S(x)$ betegne dens verdi i x.

Beregn $S(\pi)$. Tegn også grafen til S på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

Oppgave 5 Betrakt den partielle differensialligningen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + 4u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \tag{2}$$

for $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$.

a) Finn alle ikke-trivielle løsninger av ligning (2) på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0$$

for alle $t \geq 0$.

b) Finn en løsning av ligning (2) som i tillegg til randbetingelsene fra **5a** også tilfredsstiller initialbetingelsen

$$u(x,0) = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 2\sin\left(\frac{5}{2}x\right) + 3\sin\left(\frac{7}{2}x\right)$$

for alle $0 \leq x \leq \pi$.

c) Utled Crank–Nicolsons metode for numerisk løsning av ligning (2) med (de nye) randbetingelsene

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

for alle $t \geq 0$. Skriv h for steglengden i rom. Angi matriseformen til det lineære ligningssystemet som må løses for å gjøre et tidsskritt av lengde k. (Du trenger *ikke* å løse ligningssystemet!)

Oppgave 6 Du er gitt følgende Python-kode.

```
from math import log, exp  # log er den naturlige logaritmen.
                           # log is the natural logarithm.

def metodeEn(N):
    x = 0.5
    for n in range(0, N):  # 0 <= n < N
        x = -log(x)
    return x

def metodeTo(N):
    x = 0.5
    for n in range(0, N):  # 0 <= n < N
        x = exp(-x)
    return x
```

Hvilke(n), hvis noen, av de to funksjonene i koden (`metodeEn` og `metodeTo`) gir garantert en tilnærmet løsning av ligningen

$$x + \ln x = 0$$

når argumentet `N` er stort? (*Ikke* «kjør» de to funksjonene for å se på verdiene de regner ut!)

Formelark følger som vedlegg.

Numerical formulas

- Let $p(x)$ be the polynomial of degree $\le n$ which coincides with $f(x)$ at points $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. If that x and all the x_j lie in the interval $[a, b]$,
$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$
- Newton's divided difference interpolation formula $p(x)$ of degree $\le n$:
$$\begin{aligned} p(x) &= f[x_0] + (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &\quad + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$
- Simpson's rule of integration:
$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$
- Newton's method for solving a system of nonlinear equations $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ is given by the scheme
$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta\mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}\big(\mathbf{x}^{(k)}\big) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta\mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$
- Iteration methods for solving systems of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ when $A_{i,i} = 1$:
$$\text{Jacobi:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - (A - I)\mathbf{x}^{(m)}$$
$$\text{Gauss–Seidel:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - L\mathbf{x}^{(m+1)} - U\mathbf{x}^{(m)}$$
Strict diagonal dominance of A is a sufficient convergence criterion for both.
- Butcher tables for Runge–Kutta methods, where
$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{s} a_{i,j}\mathbf{k}_j) :$$

(Forward) Euler:
$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Backward Euler:
$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Heun/improved Euler:
$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

RK4:
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Discrete Fourier transform:
$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k/N}$$

Table of some Laplace transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \ldots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Table of some Fourier transforms

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$