Eksamen i TMA4135 Matematikk 4D
x. august 2015

Løsningsforslag

1 **a)** La $Y = \mathcal{L}(y)$. Da får vi

$$(s^2+1)Y(s) = e^{-\alpha s} - e^{-\beta s},$$

som gir at

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(\frac{e^{-\alpha s}}{s^2+1} - \frac{e^{-\beta s}}{s^2+1}\big) = \sin(t-\alpha)u(t-\alpha) - \sin(t-\beta)u(t-\beta).$$

2 **a)** Python-koden beskriver Newtons metode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{1}$$

for funksjonen $f(x) = e^x + \cos(x) - 5$. Da vil x_n konvergere mot løsningen av $f(x) = 0$ som beskrevet i læreboken på side 802.

b) Sekantmetoden (s. 803) er gitt ved

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}. \tag{2}$$

Med startverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 1{,}5$ får man

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \\ &= 1{,}5 - f(1{,}5)\frac{0{,}5}{f(1{,}5) - f(1{,}0)} \\ &= 1{,}67\ldots. \end{aligned}$$

3 **a)** Vi finner

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \phi''(x+ct) + \psi''(x-ct), \\ u_{tt}(x,t) &= c^2\phi''(x+ct) + c^2\psi''(x-ct). \end{aligned}$$

Innsatt i ligningen viser at u er en løsning.

b) Vi setter inn $t = 0$ i uttrykket for u og for $u_t(x,t) = c\phi'(x+ct) - c\psi'(x-ct)$. Det gir

$$u(x,0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \tag{3}$$
$$u_t(x,0) = c\phi'(x) - c\psi'(x) = g(x). \tag{4}$$

Integrasjon av ligningen for u_t gir

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c}\int_0^x g(y)dy + A \tag{5}$$

der A er en vilkårlig integrasjonskonstant.

c) Addisjon og subtraksjon av de to ligningene (3) og (5) gir

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + \int_0^x g(y)dy + A\big), \tag{6}$$
$$\psi(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - \int_0^x g(y)dy - A\big). \tag{7}$$

Erstatt x med $x+ct$ i ligning (6) og med $x-ct$ i (7) og adder uttrykkene. Det gir d'Alemberts formel

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy, \tag{8}$$

når vi bruker

$$\int_0^{x+ct} g(y)dy - \int_0^{x-ct} g(y)dy = \int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy. \tag{9}$$

d) Innsetting i d'Alemberts formel gir

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\big(\sin(x+ct)+\sin(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(y)dy \\ &= \sin(x)\cos(ct) - \frac{1}{2c}\Big|_{x-ct}^{x+ct}\cos(y) \\ &= \sin(x)\cos(ct) - \frac{1}{2c}\big(\cos(x+ct)-\cos(x-ct)\big) \\ &= \sin(x)\cos(ct) + \frac{1}{c}\sin(x)\sin(ct) \\ &= \sin(x)\big(\cos(ct)+\frac{1}{c}\sin(ct)\big). \end{aligned}$$

4 **a)** Heuns metode (s. 900 i læreboken) sier at

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\big(hf(x_n,y_n) + hf(x_{n+1}, y_n + hf(x_n,y_n))\big)$$

der $x_n = nh$. Det gir

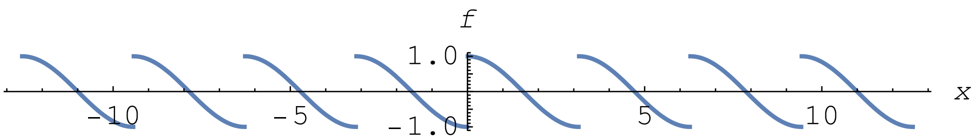
$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \frac{1}{2}\big(hf(0,1) + hf(h, 1+hf(0,1))\big) \\ &= 1 + 0{,}1\ln(2) = 1{,}0693\ldots, \end{aligned}$$

der $f(x,y) = x\ln(1+y)$.

5 **a)** Vi har

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{for } x\in(0,\pi), \\ -\cos(x), & \text{for } x\in(-\pi,0), \end{cases} \tag{10}$$

og slik at $f(x+2\pi) = f(x)$. (f har faktisk periode π.)



b) Funksjonen f oppfyller betingelsene for konvergens av Fourier-rekken, se Teorem 2, s. 480. La $S(x)$ betegne summen av Fourier-rekken. Da gjelder

$$S(x) = \frac{1}{2}\big(f(x+)+f(x-)\big),$$

der $f(x\pm)$ betegner (ensidige) høyre og venstre grenseverdier. Der betyr at

$$\begin{aligned} S(0) &= \frac{1}{2}\big(f(0+)+f(0-)\big) = 0, \\ S(\tfrac{\pi}{4}) &= \frac{1}{2}\big(f(\tfrac{\pi}{4}+)+f(\tfrac{\pi}{4}-)\big) = f(\tfrac{\pi}{4}) = \cos(\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ S(-4\pi) &= S(0) = 0. \end{aligned}$$

c) Funksjonen f er en odde funksjon. Det betyr at $a_n = 0$ for alle n. Videre er

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(2x)dx = 0. \tag{11}$$

For $n > 1$ får vi

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\big(\sin(x+nx) - \sin(x-nx)\big)dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\Big|_0^{\pi}\Big(\frac{1}{1+n}\cos((1+n)x) - \frac{1}{1-n}\cos((1-n)x)\Big) \\
&= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{1+n}((-1)^{n+1}-1) - \frac{1}{1-n}((-1)^{n-1}-1)\Big].
\end{aligned}$$

For alle odde n er $b_n = 0$. For like n får vi

$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{1+n}((-1)^{n+1}-1) - \frac{1}{1-n}((-1)^{n-1}-1)\Big] \\
&= \frac{2}{\pi}\Big(\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\Big) \\
&= \frac{4}{\pi}\frac{n}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

Dermed er Fourier-rekken til f gitt ved

$$\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin(2nx).$$

Siden f er kontinuerlig i $x = \frac{\pi}{4}$, får vi at $S(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4})$. Vi har at $\sin(n\pi/2) = 0$ for n partall. ~~Skriv derfor~~ $\cancel{n = 2m - 1}$ ~~som gir at~~

$$\cancel{\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{4(2m-1)^2-1}\sin((2m-1)\pi/4) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

~~som gir at~~

$$\cancel{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{4(2m-1)^2-1}\sin((2m-1)\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}.}$$

~~Bruker vi~~

$$\cancel{\sin((2m-1)\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\big(\sin(m\pi/2) - \cos(m\pi/2)\big),}$$

~~får vi~~

$$\cancel{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2m-1}{4(2m-1)^2-1}\big(\sin(m\pi/2) - \cos(m\pi/2)\big) = \frac{\pi}{8}.}$$