Løsningsforslag

1 a)

$$
\begin{array}{cccc}
0 & 0 & & \\
 & & 1 & \\
1 & 1 & & 3 \\
 & & 7 & \\
2 & 8 & &
\end{array}
$$

$$p(x) = (x-0) + 3\cdot(x-0)\cdot(x-1)$$
$$= \underline{\underline{3x^2 - 2x}}$$

b) $\frac{1}{3}(1\cdot 0 + 4\cdot 1 + 8\cdot 1) \underline{\underline{= 4}}$

c) $\int_0^2 x^3\,dx = \frac{1}{4}2^4 \underline{\underline{= 4}}$

$$\int_0^2 (3x^2 - 2x)\,dx = 2^3 - 2^2 \underline{\underline{= 4}}$$

Alle 3 er like fordi

i) Simpson's metode er laget ved å integrere et interpolerende andregradspolynom.

ii) Simpson's metode er og eksakt for alle tredjegradspolynom, jf. feilleddet som avhenger av den fjerdederiverte.

d) $f'(1) \approx \frac{f(2) - f(0)}{2} \underline{\underline{= 4}}$

e) $p'(1) = 6\cdot 1 - 2 \underline{\underline{= 4}}$

Likhet fordi sentral diff. er eksakt for

(1) e) andregradspolynom.

(2) a) $y' = (1 - x^2/2)^{-2} \cdot x = x \cdot y^2$

så ~~ja~~. $(y(0) = 1)$

b) Metoden implementerer forbedret Euler metode, dvs en prediktor-korriktor metode (= Heun's metode).

c) Først beregnes et steg med forlengs Euler:

$$y_E(0.1) = 1 + 0.1 \cdot 0 \cdot 1^2 = 1$$

Deretter beregnes et korrigert resultat:

$$y_H(0.1) \approx 1 + \frac{1}{2}(0 + 0.1 \cdot 0.1 \cdot 1^2)$$

$$= \underline{\underline{1,0050}}$$

d)

$$y_T \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot (0 + x y_T^2), \; x = 0,1$$

$$0,005 \cdot y_T^2 - y_T + 1 = 0 \;; \; - \text{ pga forkige svar.}$$

$$y_T = \frac{1 - \sqrt{1 - 0,02}}{0,01} \approx \underline{\underline{1,0051}}$$

$$\left[y(0,1) = \frac{1}{1 - 0,005} \approx \underline{\underline{1,0050}} \text{ eksakt} \right]$$

② e) Begge metodene er
andre ordens metoder
I eksempelet gir den forbedrede
Eulermetoden litt mer nøyaktig
svar.
Generelt kunne en forvente at
den implisitte trapesmetoden ga
et bedre resultat, så resultatet her
er noe overraskende.

Den forbedrede Euler metoden er
enklere og raskere fordi den er
eksplisitt.

3) a) $\mathcal{L}\, 8\cos 2t = 8 \cdot \dfrac{s}{s^2+4}$

b) $\mathcal{L}^{-1}\, e^{-\pi s} \cdot \dfrac{1}{s^2+4} = \dfrac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\, e^{-\pi s} \cdot \dfrac{2}{s^2+2^2}$

$= \dfrac{1}{2} \sin 2(t - \pi) \cdot u(t-\pi)$

c) $\mathcal{L}\, y' = sY - y(0)$

$\mathcal{L}\, y'' = s\,\mathcal{L}\, y' - y'(0)$

$= s^2 Y - s\, y(0) - y'(0)$

$= s^2 Y - 8s$

$\mathcal{L}\, \delta(t-\pi) = e^{-\pi s}$

$s^2 Y - 8s + 4Y = e^{-\pi s}$

$Y = \dfrac{8s}{s^2+2^2} + \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+2^2}$

$y = 8\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2(t-\pi) \cdot u(t-\pi)$

d) $\mathcal{L}\,(1 * y) = \dfrac{1}{s} \cdot \dfrac{1}{s^4} = \dfrac{1}{s^5}$

1) e)

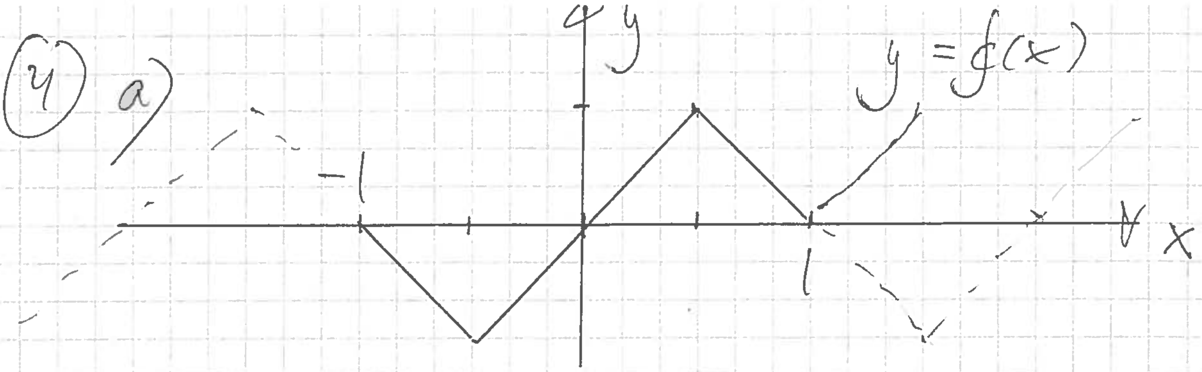
$$Y - Y \cdot \frac{1}{s^2+1} = 2! \cdot \frac{1}{s^3}$$

$$1 - \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2+1-1}{s^2+1} = \frac{s^2}{s^2+1}$$

$$Y = 2 \cdot \frac{s^2+1}{s^5} = 2 \cdot \left[\frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^5} \right]$$

$$y(t) = 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} \right] = \underline{\underline{t^2 + \frac{t^4}{12}}}$$

(4) a)



$$b_n = 2\int_0^1 \sin n\pi x \cdot f(x)\,dx$$

$$= 2\cdot\int_0^{1/2} \sin n\pi x \cdot x\,dx$$

$$+\, 2\cdot\int_{1/2}^{1} \sin n\pi x \cdot (1-x)\,dx$$

$$= 2\cdot\left[\frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x - \frac{x}{n\pi}\cos n\pi x\right]_0^{1/2}$$

$$- 2\cdot\left[\quad\cdot\quad\right]_{1/2}^{1} + \left[2\,\frac{-1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{4}{(n\pi)^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2} - \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$+ \cancel{\frac{2}{n\pi}\cdot\cos n\pi} - \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos n\pi}$$

$$+ \cancel{\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}}$$

$$b_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)^2\pi^2}\cdot(-1)^m \qquad m = 0, 1, 2 \ldots$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \cdot \frac{4\sin(2m+1)\pi x}{(2m+1)^2\cdot\pi^2}$$

5/8

k

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{3^2 \pi^2} + \dots \right)$

$\Rightarrow \pi^2 = 8 \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right)$

c) $F \dot{G} = F'' G \; ; \; \frac{F''}{F} = \frac{\dot{G}}{G} = -(n\pi)^2$

etter drøfting som leder til
$F = \sin n\pi x$ fordi $F(0) = F(1) = 0$.
Deretter finnes $G = \exp(-(n\pi)^2 t)$ og
løsning

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x \cdot e^{-(n\pi)^2 t}$$

Startbetingelsen gir b_n fra a),
så

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \cdot (-1)^m \cdot \frac{\sin (2m+1)x}{(2m+1)^2} \cdot e^{-(2m+1)^2 \pi^2 t}$$

d) $\dot{v} = \dot{u}$; $v_{xx} = u_{xx}$, så

$v_t = v_{xx}$

$v(0,t) = u(0,t) + 1 = 1$

$v(1,t) = u(0,t) + 0 = 0$

$v(x,0) = u(x,0) + 1 - x = f(x) + 1 - x$

6/8

4 d) (fortsatt fra s. 12)

Beskriver hvordan et skritt kan beregnes. La $y(t) = [v(x_n, t)]$ med en diskretisering $x_n = n \cdot \Delta x + x_0$; $n = 0, \dots, N+1$ hvor $x_0 = 0$ og $x_{N+1} = 1$. Videre benyttes

$$v_{xx}(x_n, t) \cong \frac{1}{\Delta x^2}[y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}]$$

Da finnes ($y_0 = 1$, $y_{N+1} = 0$):

$$\dot{v}(x_n, t) = v''(x_n, t)$$

$$\dot{y} \cong \frac{1}{\Delta x^2}\left[\begin{bmatrix} -2, & 1 & & \\ 1, & -2, & 1 & \\ & \ddots & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_n \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2}[\Delta_x y + R] = f(t, y(t))$$

$$= f(y(t))$$

Trapes = CN: ($r = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$)

$$y(\Delta t) = y(0) + \frac{\Delta t}{2}[f(y(0)) + f(y(\Delta t))]$$

$$= y(0) + \frac{r}{2} \cdot 2R + \frac{r}{2}[\Delta_x y(0) + \Delta_x y(\Delta t)]$$

$$[I - \frac{r}{2}\Delta_x] y(\Delta t) = r \cdot R + [I + \frac{r}{2}\Delta_x] y(0) \quad (*)$$

(4) d) (*) gir et tridiagonalt system som kan løses for å finne $y(\Delta t)$. Det kan vurderes at randbetingelsen gir et bidrag $R \neq 0$.

Systemet har formen

$$\dot{y} = Ay + R$$

og kan løses alternativt via $y = y_p + y_h$ hvor $0 = Ay_p + R$, $\dot{y}_h = Ay_h$, $y_h(0) = y(0) - y_p$. Numerisk er det ikke opplagt om dette er gunstig i to systemer.

e) Bruker diskretisering som over, men bruker i stedet baklengs Euler:

$$y(\Delta t) = y(0) + r \cdot \Delta_x y(\Delta t)$$

Her er $r = \Delta t / \Delta x^2 = \frac{1}{16} \cdot 4^2 = 1$

og

$$1 - \Delta_x = \begin{bmatrix} 1+2, & -1, & 0 \\ -1, & 3, & -1 \\ 0, & -1, & 3 \end{bmatrix}$$

$f(\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$f(\frac{3}{4}) = \frac{1}{4}$

Utskrevet:

$$\begin{array}{lll} 3y_1 - y_2 & & 1/4 \\ -y_1 + 3y_2 - y_3 & & 1/2 \\ \quad -y_2 + 3y_3 & & 1/4 \end{array}$$

4 e) Ved symmetri antar $y_1 = y_3$:

$3y_1 - y_2 = 1/4$; $-2y_1 + 3y_2 = \frac{1}{2}$

$3y_1 - y_2 = 1/4$

~~$6y_1 = 1/2 \Rightarrow y_1 = 1/12$~~ X

~~$y_2 = 3y_1 - \frac{1}{4} = 0$~~ Y

~~Sjekk: $-y_1 + 3y_2 - y_3 = -\frac{2}{12} = -\frac{1}{6}$~~

$6y_1 - 2y_2 = 1/2$

$-6y_1 + 9y_2 = 3/2$

$7y_2 = 2$; $Y = y_2 = 2/7$

$y_1 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} - \frac{1}{4} = \frac{12-7}{28} = \frac{5}{28} = X$

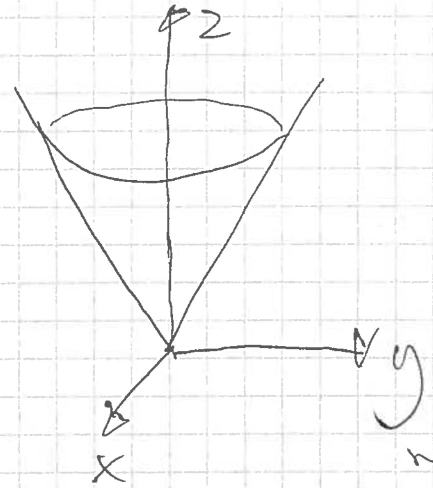
3/5

5) a) $h_x = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$

$\nabla h = \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|}$; $\nabla h(P^*) = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}}$

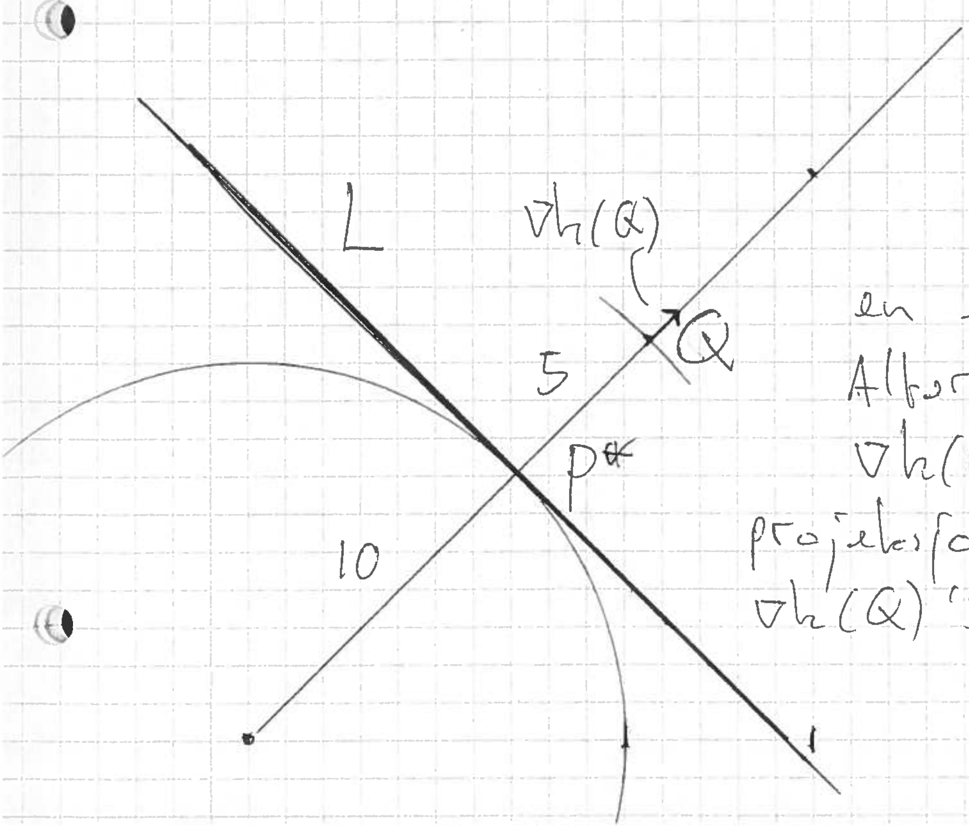
$D_{\vec{a}} h = \vec{a} \cdot \nabla h = 0$

b)



Stigning = 1 radielt gir at ∇h peker radielt og har lengde 1, jf grad h: Retning der den vokser mest og lengde lik denne stigningen.

c) $h(x,y) = 10$ er en sirkel med radius 10.



$\nabla h(Q)$ er normal til linjen og er en enhetsvektor.
Alternativt:
$\nabla h(Q) \cdot (Q - P) =$ projeksjonen av $Q - P$ på $\nabla h(Q)$'s retning.

4/c

6 a) To ligninger:

$$|(x,y) - A| = 15.5\,m$$

$$|(x,y) - B| = 6.5\,m$$

To gradienter

$$\nabla f_A(R_0^*) = \frac{R_0^* - A}{|R_0^* - A|} = \frac{(15,4)}{|(15,4)|}$$

$$\nabla f_B(R_0^*) = \frac{(15,4)-(20,0)}{|\cdot|} = \frac{(-5,4)}{|(-5,4)|}$$

Lineariserte ligninger (= Newton):

$$\begin{bmatrix} \nabla f_A(R_0^*) \\ \nabla f_B(R_0^*) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \end{bmatrix} = \begin{matrix} 15.5m - |R_0^* - A| \\ 6.5m - |R_0^* - A| \end{matrix}$$

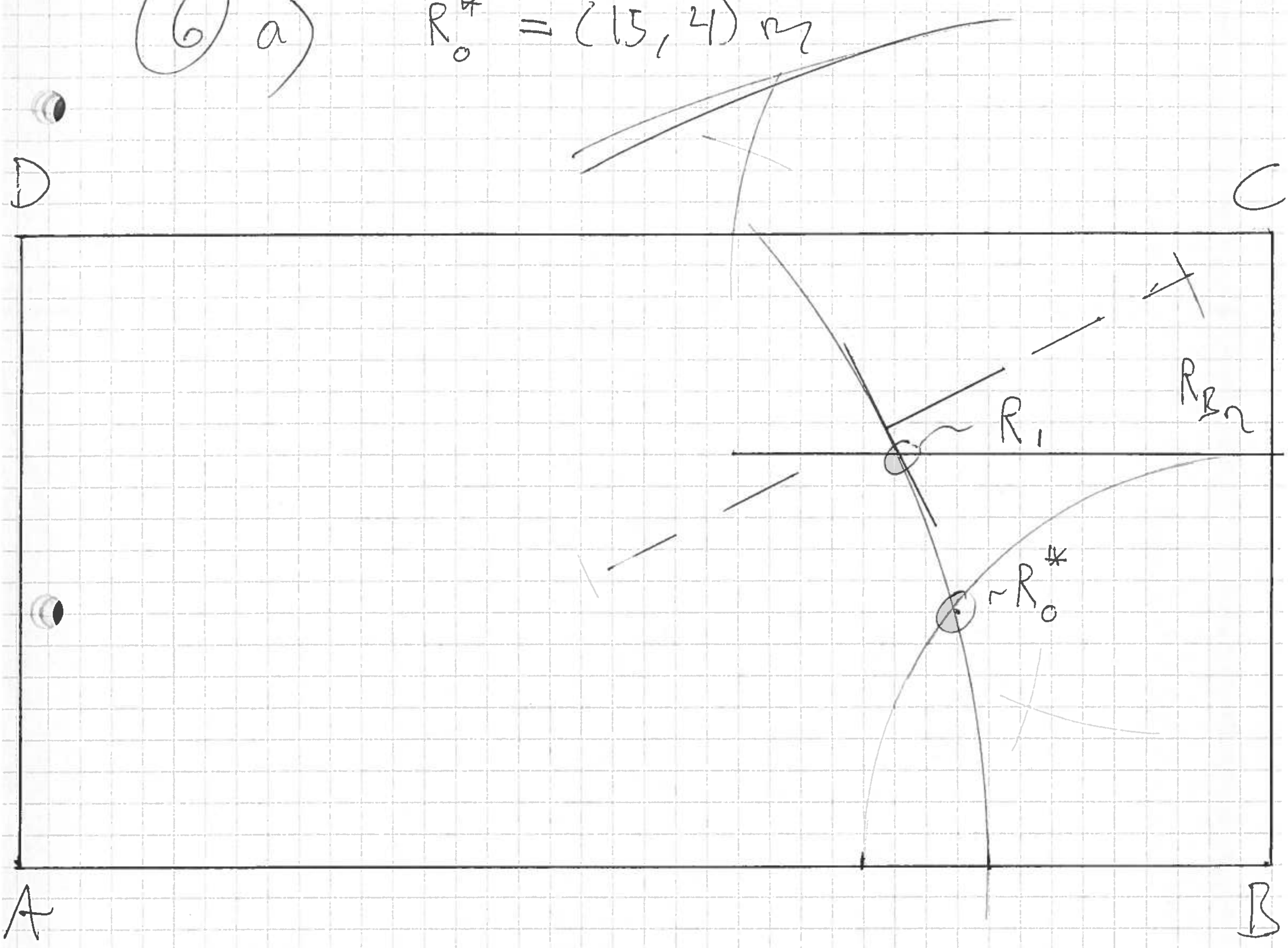
$$\begin{matrix} 15, & 4 \\ -5, & 4 \end{matrix} \cdot \begin{matrix} \Delta x \\ \Delta y \end{matrix} = \begin{matrix} -0,3753\ m \\ 0,6203\ m \end{matrix}$$

Gauss-eliminasjon gir $(\Delta x, \Delta y) \approx (-0,0498,\ 0,0929)\,m$

og $\underline{\underline{R_1^* \approx (14.95,\ 4.09)\,m}}$

(som er lik eksakt løsning med de oppgitte antall siffer.)

(6) a) $R_0^* = (15, 4)$ m



b) $R_1 = (14, 6.5)$ m

$R_B = (20, 6.5)$ m — Konvergens etter 1 steg!

Med 4 målinger vil Newtons metode gi 4 linjer, og approksimert skjæringspunkt finnes i hvert steg med minste kvadraters metode.