NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Eduardo Ortega

Tlf: 735 91 799

Eksamensdato: 08. august 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: C: Bestemt, enkelt kalkulator og Rottmann matematisk formelsamling.

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes. Du må ha med nok mellomregninger til at tenkemåten din klart fremgår.

Et formelark er vedlagt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

1/12-15 E. L.

Dato Sign

Oppgave 1 Finn polynomet av lavest mulig grad som interpolerer følgende data:

n	0	1	2
x_n	0	1	2
y_n	0	1	1/2

Oppgave 2 Bruk Laplace-transformasjon for å løse differensialligningen

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = tu(t-1)$$

med initialbetingelser $y(0) = 1$ og $y'(0) = -1$, hvor u betegner Heavisides trappefunksjon (enhetssprangfunksjonen).

Oppgave 3 Betrakt den *tredjeordens* ordinære differensialligningen (ODE)

$$(1+x^3)y'''(x) - xy'(x) - y(x) = x^2 \tag{1}$$

for $x \geq 0$.

a) Skriv ODE-en i ligning (1) som et system av *førsteordens* ODE-er på formen

$$\mathbf{z}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{z}(x)).$$

b) Vis at å gjøre et skritt med lengde h med baklengs Euler for ligning (1) er det samme som å løse det lineære ligningsysstemet

$$\begin{pmatrix} 1 & -h & 0 \\ 0 & 1 & -h \\ \frac{-1}{1+h^2} & \frac{-h}{1+h^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(n+1)} \\ z_2^{(n+1)} \\ z_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(n)} \\ z_2^{(n)} \\ z_3^{(n)} + \frac{h^3}{1+h^2} \end{pmatrix}.$$

Ville du valgt en skrittlengde på $h = 1/2$ eller $h = 2$ hvis du skulle løse dette ligningssystemet med Gauss–Seidel-iterasjon? (Husk å begrunne svaret ditt!)

Oppgave 4 La f være funksjonen definert av

$$f(x) = L - x \quad \text{for } x \in [0, L]$$

hvor $L > 0$ er gitt.

a) Bestem Fourier-rekken til den *like periodiske* utvidelsen av f med periode $2L$. Skissér grafen til Fourier-rekken, og vær nøye med eventuelle diskontinuitetspunkter.

b) Bestem Fourier-rekken til den *odde periodiske* utvidelsen av f med periode $2L$. Skissér grafen til Fourier-rekken, og vær nøye med eventuelle diskontinuitetspunkter.

c) Forklar hvorfor

$$\frac{2L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{L}\right)=\frac{L}{2}$$

for $x \in (0, L)$. Hva er venstresiden lik når $x = 0$? Hva er den lik når $x = L$?

d) Bestem summen av den uendelige rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}.$$

Oppgave 5 Funksjonene f og g er definert ved

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{og} \quad g(x) = xe^{-x^2}.$$

Bruk Fourier-transformasjon for å vise at

$$(f * g)(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}\, x\, e^{-x^2/2}$$

Oppgave 6 Betrakt Laplaces ligning

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \tag{2}$$

med $0 < x < \pi$ og $0 < y < \pi/2$.

a) Finn alle ikke-trivielle løsninger av ligning (2) på formen $u(x, y) = F(x)G(y)$ som tilfredsstiller randbetingelsene

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)=\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y)=0.$$

b) Finn en løsning av ligning (2) som i tillegg til randbetingelsene fra **6a** også tilfredsstiller randbetingelsene

$$u(x,0)=0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,\frac{\pi}{2}\right)=(1+\cos x)^2$$

for alle $0 < x < \pi$.

Formelark følger som vedlegg.

Numerical formulas

- Let $p(x)$ be the polynomial of degree $\leq n$ which coincides with $f(x)$ at points $x_i, i = 0, 1, \dots, n$. If that x and all the x_j lie in the interval $[a, b]$,

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

- Newton's divided difference interpolation formula $p(x)$ of degree $\leq n$:

$$\begin{aligned} p(x) = f[x_0] &+ (x - x_0) f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1) f[x_0, x_1, x_2] \\ &+ \cdots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, \dots, x_n] \end{aligned}$$

- Simpson's rule of integration:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \, \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

- Newton's method for solving a system of nonlinear equations $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ is given by the scheme

$$\begin{aligned} J^{(k)} \cdot \Delta \mathbf{x}^{(k)} &= -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) \\ \mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}. \end{aligned}$$

- Iteration methods for solving systems of linear equations $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ when $A_{i,i} = 1$:

$$\text{Jacobi:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - (A - I)\mathbf{x}^{(m)}$$

$$\text{Gauss–Seidel:} \quad \mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - L\mathbf{x}^{(m+1)} - U\mathbf{x}^{(m)}$$

  Strict diagonal dominance of A is a sufficient convergence criterion for both.

- Butcher tables for Runge–Kutta methods, where

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \sum_{i=1}^{s} b_i \mathbf{k}_i, \qquad \mathbf{k}_i = h\mathbf{f}(x_n + c_i h, \mathbf{y}_n + \sum_{j=1}^{s} a_{i,j} \mathbf{k}_j) :$$

(Forward) Euler:

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Backward Euler:

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Heun/improved Euler:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

RK4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

- Discrete Fourier transform:

$$\hat{f}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-2\pi i n k/N}$$

Table of some Laplace transforms

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$t^n \ (n = 0, 1, 2, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

Table of some Fourier transforms

$f(x)$	$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$
$g(x) = f(ax)$	$\hat{g}(\omega) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2+a^2}$