NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D: Løysing**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf:

Eksamensdato: 13 desember 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:0013:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:

- Håper eksamen var lett og at alle gjør det bedre enn gjennomsnittet.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☒	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Vi skal ha

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \text{for} \quad 0 < x < \pi$$

Da må

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \, \mathrm{d}x = 0,$$

og

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos nx \, \mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n \text{ jevn} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} & \text{hvis } n \text{ er odde.} \end{cases}$$

Altså er

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x \quad \text{for} \quad 0 < x < \pi.$$

b) Merk at cosinusrekken konvergerer til den jevne 2π-periodiske utvidelsen

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} & \text{for } 0 \le x \le \pi \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} & \text{for } -\pi \le x \le 0 \end{cases}$$

for alle x. Altså kan vi velge $x = 0$ og beregne

$$\frac{\pi}{4} = f(0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

slik at

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Oppgave 2 Observer først at venstresiden er konvolusjonen mellom f og $e^{-|x|}$, slik at ligningen kan skrives

$$f(x) * e^{-|x|} = e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Vi fouriertransformerer begge sider, bruker konvolusjonsteoremet

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(e^{-|x|}) = \mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2}}),$$

og tabell, slik at

$$\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\omega^2/2}}{\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\omega^2+1}}} = \frac{-1}{2}\left(-\omega^2 e^{-\omega^2/2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-\omega^2/2}\right).$$

Vi bruker identiteten $\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f)$, koker litt rundt og inverstransformerer, og får

$$f(x) = \frac{-1}{2}(e^{-x^2/2})'' + \frac{1}{2}e^{-x^2/2} = \frac{-1}{2}(x^2-1)e^{-x^2/2} + \frac{1}{2}e^{-x^2/2} = \left(-\frac{x^2}{2}+1\right)e^{-x^2/2}.$$

Oppgave 3

a) Vi laplacetransformerer begge sider, og får

$$s^2\mathcal{L}(y) - s - 3s\mathcal{L}(y) + 3 + 2\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(0) = 0,$$

slik at

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s-3}{(s-1)(s-2)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}.$$

Da blir

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = 2e^t - e^{2t}.$$

b) Vi setter $x(t) = y'(t)$, slik at systemet blir

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ x \end{pmatrix}.$$

Velg $h = 0.1$, og definer x_n og y_n som tilnærminger til $x(nh)$ og $y(nh)$, henholdsvis. Eulers eksplisitte metode er

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 3x_n - 2y_n \\ x_n \end{pmatrix},$$

og setter vi

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

får vi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 3x_0 - 2y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgaven spør etter $y_1 = 1$.

Oppgave 4 Vi skriver ligningen som $x = g(x) = e^{x/3}$. Fikspunktmetoden konvergerer siden $|g'(x)| = |\frac{1}{3}e^{x/3}| \leq e/3 < 1$ på $(0, 3)$. Fikspunktiterasjonen er

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

slik at

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) = e^{1/3} = 1.3956 \\ x_2 &= g(x_1) = 1.5923 \\ x_3 &= g(x_2) = 1.7002. \end{aligned}$$

Oppgave 5 Vi bytter plass på to rekker

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 20 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -40 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 28 \end{array}$$

slik at systemet blir diagonaldominant, og Jacobi konvergerer. Nå setter vi

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

og

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

slik at Jacobis iterasjon blir

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Vi har

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

slik at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.75 \\ -9.5 \\ 7.25 \end{pmatrix}$$

og

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4.75 \\ -9.5 \\ 7.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4.625 \end{pmatrix}$$

For de interesserte: hvis du kjører til konvergens, får du

$$\begin{pmatrix} x_{19} \\ y_{19} \\ z_{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4138 \\ -8.6897 \\ 4.8276 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 6

a) Vi stapper $u(x,t) = F(x)G(t)$ inn i varmeligningen og får

$$F'' - kF = 0$$

og

$$G' - kG = 0.$$

På grunn av den vanlige prosedyren med randkravene ser vi at $k = -p^2 < 0$. Den første ligningen har løsning

$$F(x) = A\cos px + B\sin px,$$

og bruker vi randkravene $F(0) = 0$ og $F(3) = 0$, får vi $A = 0$ og

$$\sin 3p = 0, \qquad \text{slik at} \qquad p = \frac{n\pi}{3}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vi trenger ikke B, så den setter vi til 1. Den andre ligningen løses av

$$G_n(t) = B_n e^{-(n\pi/3)^2 t}.$$

slik at alle løsninger er

$$u_n(x,t) = F(x)G_n(t) = B_n \sin\frac{n\pi x}{3} e^{-(n\pi/3)^2 t}.$$

b) Vi summerer alle funksjonene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{3} e^{-(n\pi/3)^2 t}.$$

Når vi setter

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{3} = 2\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right).$$

går dette i orden dersom B_n er fourierkoeffisientene til f. De er trivielle å beregne, siden f er en sinusfunksjon. Vi får

$$B_n = 0 \quad \text{for } n \neq 1, \qquad B_1 = 2,$$

slik at

$$u(x,t) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) e^{-(\pi/3)^2 t}.$$

c) Crank-Nicolson er gitt ved

$$(2+2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2-2r)u_{ij} + \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}).$$

der $r = k/h^2 = 1/2$, så vi får

$$3u_{i,j+1} - \frac{1}{2}(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = u_{ij} + \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$$

Vi vil finne $u_{11} \approx u(1, 0.5)$, som er ett tidssteg opp fra $t = 0$. Bruker vi initialkravet, får vi $u_{10} = u_{20} = 1.7321$ og $u_{00} = u_{30} = 0$ og . Ligningsystemet blir

$$3u_{11} - \frac{1}{2}u_{21} = 2.5982$$
$$3u_{21} - \frac{1}{2}u_{11} = 2.5982$$

Når dette løses på gamlemåten, får vi

$$u_{11} = u_{21} = 1.0393$$

slik at

$$u(1, 0.5) \approx 1.0393.$$