NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4135 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen: Morten Andreas Nome

Tlf: 90 84 97 83

Eksamensdato: 13. desember 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00 - 13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C: Bestemt, enkel kalkulator. Rottmann: Matematisk formelsamling

Annen informasjon:
Denne eksamenen består av 10 delpunkt som alle teller like mye. Alle svar skal begrunnes. Lykke til.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La f være definert ved

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \qquad \text{for } 0 < x < \pi.$$

a) Finn Fourier-cosinus-rekken til f.

b) Bruk resultatet til å beregne summen $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Oppgave 2 Løs integralligningen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)e^{-|t|}\,\mathrm{d}t = e^{\frac{-x^2}{2}}$$

ved hjelp av fouriertransform.

Oppgave 3 Betrakt den ordinære differensialligningen

$$y'' - 3y' + 2y = 0,$$

med initialbetingelsene

$$y(0) = 1 \quad \text{og} \quad y'(0) = 0.$$

a) Løs ligningen ved hjelp av laplacetransform.

b) Skriv ligningen om til et ligningsystem, og finn en approksimasjon til $y(0.1)$ ved å beregne ett steg med Eulers eksplisitte metode. Bruk 6 siffer i beregningene.

Oppgave 4 Ligningen $e^{\frac{x}{3}} - x = 0$ har en entydig løsning på intervallet $(0, 3)$. Finn en tilnærming til denne ved å sette $x_0 = 1$, og beregne tre fikspunktiterasjoner. Bruk 5 siffer i dine beregninger.

Oppgave 5 Gitt ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 20 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 28 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -40 \end{array}$$

Beregn to iterasjoner av Jacobis metode med $\mathbf{x}_0 = (1,\ 1,\ 1)$ som startverdi. Bruk 5 siffer i dine beregninger.

Oppgave 6 La $u(x,t)$ være temperaturen ved tid t i en stav med lengde 3 som ligger langs x-aksen. Den tilfredsstiller varmeligningen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 \leq x \leq 3, \quad t \geq 0,$$

med randbetingelser

$$u(0,t) = u(3,t) = 0, \qquad t \geq 0.$$

a) Finn alle løsninger på formen $u(x,t) = F(x)G(t)$ som tilfredsstiller randbetingelsene.

b) Ved tiden $t = 0$ er temperaturen gitt ved $f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$. Finn løsningen som også tilfredsstiller denne initialbetingelsen.

c) Bruk Crank–Nicolsons metode med $k = 0.5$ og $h = 1$ for å approksimere verdien av $u(1, 0.5)$. Bruk 5 siffer i dine beregninger.

Fourier Transform

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, \mathrm{d}\omega$	$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, \mathrm{d}x$
$f * g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$
$f'(x)$	$i\omega \hat{f}(\omega)$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\omega^2/4a}$
$e^{-a\lvert x\rvert}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\lvert\omega\rvert}}{a}$
$f(x) = 1$ for $\lvert x\rvert < a$, 0 otherwise	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega a}{\omega}$

Laplace Transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-sa} F(s)$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$f * g(t)$	$F(s)G(s)$

Numerics

- Newton's method: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.
- Newton's method for system of equations: $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - JF(\vec{x}_k)^{-1}F(\vec{x}_k)$, with $JF = (\partial_j f_i)$.
- Lagrange interpolation: $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f_k$, with $l_k(x) = \prod_{j\neq k}(x - x_j)$.
- Interpolation error: $\epsilon_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$.
- Chebyshev points: $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right)$, $0 \leq k \leq n$.
- Newton's divided difference: $f(x) \approx f_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] +$ $(x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, \ldots, x_n]$, with $f[x_0, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1,\ldots x_k] - f[x_0,\ldots,x_{k-1}]}{x_k - x_0}$.
- Trapezoid rule: $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx h\left[\frac{1}{2}f(a) + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2}f(b)\right]$.
  Error of the trapezoid rule: $|\epsilon| \leq \frac{b-a}{12}h^2 \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
- Simpson rule: $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \cdots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n\right]$.
  Error of the Simpson rule: $|\epsilon| \leq \frac{b-a}{180}h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$.
- Gauss–Seidel iteration: $\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} - \mathbf{L}\mathbf{x}^{(m+1)} - \mathbf{U}\mathbf{x}^{(m)}$, with $\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{L} + \mathbf{U}$.
- Jacobi iteration: $\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{b} + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}^{(m)}$.
- Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$.
- Improved Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}h[\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n) + \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}^*_{n+1})]$, where $\mathbf{y}^*_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$.
- Classical Runge–Kutta method: $\mathbf{k}_1 = h\mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n)$,
  $\mathbf{k}_2 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_1/2)$, $\mathbf{k}_3 = h\mathbf{f}(x_n + h/2, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_2/2)$,
  $\mathbf{k}_4 = h\mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3)$, $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}\mathbf{k}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{k}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{k}_4$.
- Backward Euler method: $\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + h\mathbf{f}(x_{n+1}, \mathbf{y}_{n+1})$.
- Finite differences: $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - u(x-h,y)}{2h}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) \approx \frac{u(x+h,y) - 2u(x,y) + u(x-h,y)}{h^2}$.
- Crank–Nicolson method for the heat equation: $r = \frac{k}{h^2}$,
  $(2 + 2r)u_{i,j+1} - r(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1}) = (2 - 2r)u_{ij} + r(u_{i+1,j} + u_{i-1,j})$.