1

a) Perioden er $T = 4$ fordi grafen viser at $f(x+T) = f(x)$ for alle x.

b) f er like fordi $f(-x) = f(x)$ for alle x

$(\mathcal{L}\, t = 1/s^2)$

2 Tar $\mathcal{L}$ til lign. $(\mathcal{L}\, y' = sY - y(0))$

a) $Y + \frac{1}{s^2} \cdot (sY - 1) = 0$

$s^2 Y + sY - 1 = 0 \Rightarrow Y = \frac{1}{s \cdot (s+1)}$

$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$

b) $y(t) = \mathcal{L}^{-1} Y = 1 - e^{-t} \quad t > 0$

$y(0) = 1$ Sprang!

Kan og løsen via $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s+1}\right)$

$= 1 \cancel{*} e^{-t}$

③

a) $y(0{,}1) \approx y(0) + 0{,}1 \cdot y'(0) = 1 + 0{,}1 \cdot 0 = 1$

$y(0{,}1) \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot \left(0 - \frac{0{,}1}{1^2}\right) = 0{,}995$

$y(0{,}2) \approx 0{,}995 + 0{,}1 \cdot \frac{-0{,}1}{(0{,}995)^2} = 0{,}9849$

$y(0{,}2) \approx 0{,}995 + \frac{1}{2} 0{,}1 \cdot \left(-\frac{0{,}1}{(0{,}995)^2} - \frac{0{,}2}{(0{,}9849)^2}\right)$

$\approx 0{,}9796 \approx 0{,}980$

b) $dy/dx = -x/y^2$, $y^2 dy = -x\,dx$

$\frac{1}{3} y^3 = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3}$ $\quad (y(0) = 1)$

$y = \left(1 - \frac{3}{2} x^2\right)^{1/3}$

$y(0{,}1) \approx 0{,}995$ (bra!)

$y(0{,}2) \approx 0{,}9796$ (nesten for bra!)

(Feilen øker noe, men ikke synlig her.)

④

a) $-\frac{b-a}{12} \cdot h^2 \cdot f''(t)$

$f' = (x^2+1)^{-1} \cdot 2x$

$f'' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2} = \frac{2 \cdot (x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 2\cdot\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$|f''| \le 2\cdot|1-x^2| \le 2 \qquad -1 \le x \le 1$$

Kan notere at $f'' > 0$, så trapesmetode vil gi et svar større enn eksakt.

$$\frac{2}{12}\cdot h^2\cdot 2 < 0{,}1 \Rightarrow h < \sqrt{0{,}3} \approx 0{,}5477$$

Alternativt $\frac{2}{n} < \sqrt{0{,}3}$, $n > \frac{2}{\sqrt{0{,}3}} \approx 3{,}65$

$n \ge 4$; $h \le 0{,}5$

b)

$$J \approx 0{,}5\cdot\left[f(-1)\cdot\tfrac{1}{2} + f(-0{,}5) + f(0) + f(0{,}5) + \tfrac{1}{2}f(1)\right]$$

$$\approx 0{,}5677 \approx 0{,}57$$

$f(-1) = \ln 2 = f(1) \approx 0{,}6931$

$f(-0{,}5) = f(0{,}5) = \ln(1{,}25) \approx 0{,}2231$

$f(0) = \ln 1 = 0$

c)

$$J \approx \frac{0{,}5}{3}\left[f(-1) + 4f(-0{,}5) + 2\cdot 0 + 4f(0{,}5) + f(1)\right]$$

$\approx 0{,}5286 \approx 0{,}53$

(Eksakt $= 0{,}5278870 1\ldots$)

d) $0{,}57 \pm 0{,}1$ samsvarer godt med Simpson's $0{,}53$. I tillegg er $0{,}57 > 0{,}53$, i samsvar med $f'' > 0$.

e) Ved 1 punkt blir det rett for en konstant funksjon. Ved 2 punkter velges 2 vekter og 2 punkter, dvs. 4 ukjente som bestemmes ved rett integral for $1, x, x^2, x^3$ som gir presisjonsgrad $2 \cdot 2 - 1 = 3$. Generelt gir n punkter $2n$ ukjente for $2n$ ligninger fra krav om rett integral for $1, x, x^2, \ldots, x^{2n-1}$.

Integralet og approksimasjonen er lineær, så Gauss integrasjon blir eksakt for polynom opp til $(2n-1)$-grad.

5

a)

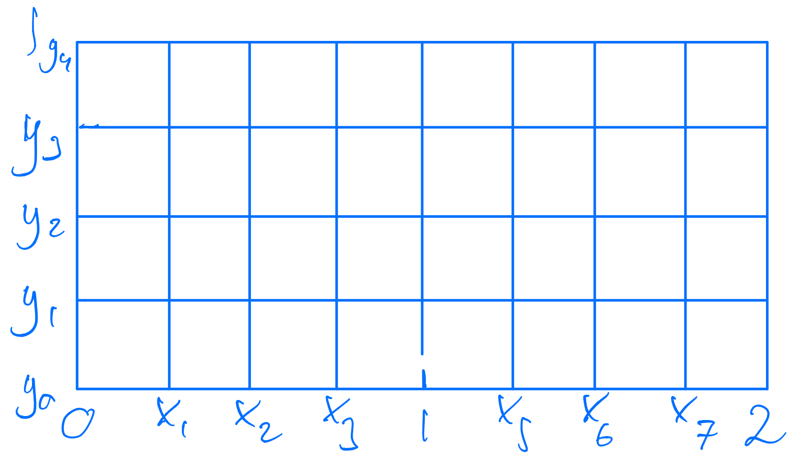


Fig. 1 En approksimasjon til $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ er gitt ved at

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \approx \frac{1}{4h^2}[\bar{u}_{ij} - u_{ij}]$$

dvs $u_{ij} = \bar{u}_{ij} = \frac{1}{4}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}]$

$\Rightarrow$: u_{ij} = middelverdi av verdien på nabopunktene. Dette gir 3×7 ligninger for de 21 ukjente. Kan løses f.eks. med Gauss eliminasjon. Randbetingelsen ved $y=1$ sørger for løsning $\neq 0$.

b) $\# x\text{-punkter} = \frac{2}{h} - 1$

$\# y\text{-punkter} = \frac{1}{h} - 1$

$\# \text{ukjente} = \left(\frac{2}{h} - 1\right)\cdot\left(\frac{1}{h} - 1\right)$

$= \frac{1}{h^2}\cdot(2-h)\cdot(1-h)$

Sjekk: $h = 0{,}25$ gir $3 \cdot 7 = 21$

c) $u_{xx} = F''G$, $u_{yy} = F\cdot G''$

$0 = u_{xx} + u_{yy} = F''G + F\cdot G''$

$= \frac{F''}{F} + \frac{G''}{G}$

$F''/F = -k_n^2$ via drøfting

$F = \cancel{A_n \cdot \cos k_n x} + B_n \cdot \sin k_n x$

$k_n \cdot 2 = \pi n \Rightarrow k_n = \pi n/2$

fordi $F(0) = F(2) = 0$

$G''/G = k_n^2$; $G_n = \frac{1}{2}(e^{k_n y} - e^{-k_n y})$

$$u_n(x,y) = B_n \cdot \sinh(k_n y) \cdot \sin(k_n x)$$

d) $$u(x,1) = \sin(\pi x) \cdot \cos(2\pi x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{B_n \cdot \sinh(k_n)}_{\shortparallel} \cdot \sin(k_n x)$$

Fourier sinus koeff. til $u(x,1)$.

$$\left(e^{i2\pi x} + e^{-i2\pi x}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2i} \left(e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}\right)$$

$$= \frac{1}{4i} \cdot \left[e^{i3\pi x} - e^{i\pi x} + e^{-i\pi x} - e^{-i3\pi x}\right]$$

$\Rightarrow$ $\cos 2\pi x \cdot \sin \pi x$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin 3\pi x - \sin \pi x\right]$$

$\Rightarrow$ Kun 2 koeff. ulik 0

$$B_2 \cdot \sinh(\pi) = -\frac{1}{2}$$

$$B_6 \cdot \sinh(3\pi) = \frac{1}{2}$$

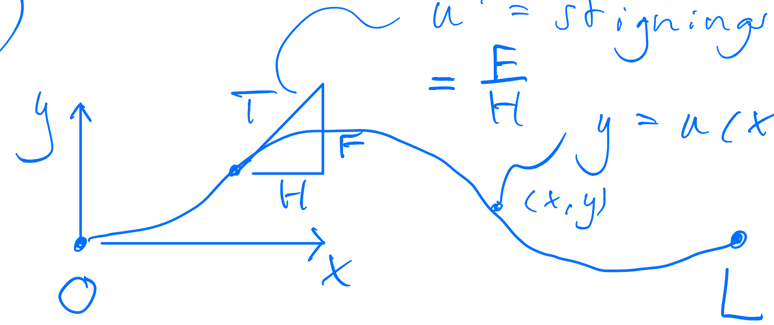
$$) : \quad u(x, y) = -\frac{1}{2} \frac{\sinh \pi y}{\sinh \pi} \cdot \sin \pi x + \frac{1}{2} \frac{\sinh 3\pi y}{\sinh 3\pi} \cdot \sin 3\pi x$$

Alternativt kan Fourier sinus koeff. regnes ut ved integrasjon.

(6)

a)

b)



$u' =$ stigningstall til kurven. $= \frac{F}{H}$

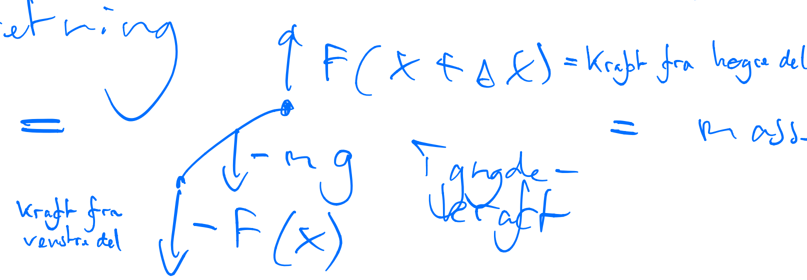
$y = u(x,t)$ ved gitt t

Fig. A & B Ved et gitt tidspunkt t er strengen gitt av kurven festet i $(0,0)$ og $(L,0)$

u' er stigningstallet $= \frac{F}{H}$ ved antagelse om ideell streng: T er tangent til kurven.

c) Ingen masse passerer x eller $x + \Delta x$, så dermed er massen bevart!

d) Det er kun netto kraft i vertikalretning



$=$ masse $\times$ akselerasjon

$\therefore \quad m \cdot \ddot{u} = F(x+\Delta x, t) - F(x,t) - mg$

$$\frac{m}{\Delta x} \cdot \ddot{u} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - \frac{m}{\Delta x} \cdot g$$

$$\Big\downarrow \Delta x \to 0$$

$$\rho \ddot{u} = F' - \rho g \qquad (2)$$

e) Vi setter $F = u' \cdot H$ inn i (2) og dividerer med ρ:

$$\ddot{u} = \frac{H}{\rho} \cdot u'' - g \qquad (3)$$

som skulle vises $\left(c^2 = \frac{H}{\rho} \right)$.

I utledningen over ble det antatt at bevegelsen er rent vertikal. (Dette er kun mulig for den enklenkte mulig materiallov: Da er (3) eksakt!) Dette er en approksimasjon generelt, og er gyldig ved små utsving.