NTNU
Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125/30/35 Matematikk 4D**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Et stemplet gult A5-ark med egne håndskrevne notater og formler (begge sider)
Vedlagt formelark

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes og skal inneholde nok detaljer til at det kommer klart fram svar har fram-kommet.
Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 10

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 La u være heavisidefunksjonen

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Vis at

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{for } a \geq 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = u(t-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

og skisser løsningen.

Forslag til løsning:

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \int_0^\infty u(t-a)e^{-ts}\,dt = \int_a^\infty e^{-ts}\,dt = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Now apply L.T. to b) we get

$$s^2Y + Y = \frac{e^{-s}}{s},$$

thus

$$Y = \frac{e^{-s}}{s(s^2+1)}.$$

Notice that

$$\mathcal{L}(e^{it}) = \frac{1}{s-i} = \frac{s+i}{s^2+1}$$

and the Euler formula together give

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{s^2+1},$$

thus

$$Y = \mathcal{L}(u(t-1)) \cdot \mathcal{L}(\sin t),$$

which implies that

$$y(t) = \int_0^t u(t-\tau-1)\sin\tau\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{if } t < 1, \\ \int_0^{t-1} \sin\tau\,d\tau = 1 - \cos(t-1) & \text{if } t \geq 1. \end{cases}$$

Thus

$$y(t) = u(t-1)(1 - \cos(t-1)).$$

Oppgave 2 Denne teller som totalt en deloppgave.

a) Finn fourierrekken til funksjonen

$$f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 1$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$.

b) Problem for 4N
Finn Fouriertransformasjonen til funksjonen $f(x) = 6x\exp(-5x^2)$.

c) Gitt funksjonen

$$u(x, y) = xy + y^2 + e^{2x} + \sin y.$$

Beregn gradienten til u.

Forslag til løsning:

Since Fourier series of a 2π periodic function is an orthogonal decomposition wrt the orthogonal basis $\{1, \cos nt, \sin nt\}_{n\geq 1}$, we know that

$$f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 1$$

already gives the Fourier series of f.

Recall that $\mathcal{F}(f'(x))(w) = iw\mathcal{F}(f(x))(w)$ and observe that

$$f(x) = 6x\exp(-5x^2) = -\frac{6}{10}\frac{d}{dx}\exp(-5x^2).$$

Then

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\Big(6x\exp(-5x^2)\Big) &= \mathcal{F}\Big(-\frac{6}{10}\frac{d}{dx}\exp(-5x^2)\Big) \\
&= -\frac{6}{10}iw\mathcal{F}\Big(\exp(-5x^2)\Big) \\
&= \frac{6iw}{10\sqrt{10}}\exp\Big(-w^2/20\Big).
\end{aligned}$$

Compute

$$u_x = y + 2e^{2x}, \quad u_y = x + 2y + \cos y,$$

the gradient of u can be written as

$$(y + 2e^{2x}, x + 2y + \cos y).$$

Oppgave 3 The answer to this may be written down on the yellow sheet, so it should be given some twist.
Could we give the Laplace equation instead? It has not been lectured, but the technique is exactly the same.
Morten: If you want to keep the wave equation: One initial value is missing.

Finn løsningen til bølgelikningen

$$u_{tt} = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Forslag til løsning:

It is easy to check that

$$u(x,t) = \sin x \cos t$$

is the solution.

Oppgave 4 Utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2 t}}\, dv, \quad t > 0,$$

for varmelikningen

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

på hele x-aksen med initialkrav

$$u(x,0) = f(x).$$

Forslag til løsning:

Apply a change of variable $2c^2t = s$, it is enough to prove the case that $2c^2 = 1$. Consider Fourier transform of u_t with respect to the x variable

$$\mathcal{F}(u_t) = \widehat{u_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(t,x)e^{-ixw}\,dx.$$

Then we have

$$\mathcal{F}(u_t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}u_{xx}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}u_{xx}(t,x)e^{-ixw}\,dx.$$

Recall that if u is smooth and rapidly decreasing with respect to x then

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}e^{-ixw}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixw}\,d(u_x) = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x\,d(e^{-ixw}) = iw\int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ixw}\,dx,$$

the same computation for u gives

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x e^{-ixw}\,dx = iw\int_{-\infty}^{\infty} u e^{-ixw}\,dx,$$

thus we have

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{-w^2}{2}\mathcal{F}(u), \quad \mathcal{F}(u) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)e^{-ixw}\,dx$$

Notice that we also have

$$\mathcal{F}(u_t) = (\mathcal{F}(u))_t.$$

Thus $\mathcal{F}(u)$ satisfies the following ODE.

$$(\mathcal{F}(u))_t = \frac{-w^2}{2}\mathcal{F}(u).$$

The general solution is

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = c(w)e^{\frac{-w^2}{2}t}.$$

Notice that our initial condition implies

$$\mathcal{F}(u)(0,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixw}\,dx = \mathcal{F}(f).$$

Thus

$$c(w) = \mathcal{F}(f).$$

Now we have

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = \mathcal{F}(f) \cdot e^{\frac{-w^2}{2}t}.$$

Recall that

$$e^{\frac{-u^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} e^{-iyu}\, dy.$$

Take

$$u = w\sqrt{t},\ \ y = \frac{x}{\sqrt{t}},$$

we get

$$e^{\frac{-w^2}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2t}} e^{-ixw}\, dx = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2t}}).$$

Thus

$$\mathcal{F}(u)(t,w) = \mathcal{F}(f) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{F}(e^{\frac{-x^2}{2t}}) \right)$$

and the Fourier convolution formula gives

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} (f \star e^{\frac{-x^2}{2t}}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(p) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-(x-p)^2}{2t}}\, dp,$$

i.e. the solution $u(t,x)$ is given by convolution of the initial temperature distribution with the heat kernel.

Oppgave 5 Finn polynomet av grad 3 som interpolerer $f(x) = e^x$ i punktene $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$.

Forslag til løsning: Laplace interpolasjon:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= \frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)} + \frac{x(x-2)(x-3)}{1\cdot(-1)\cdot(-2)} e + \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-3)}{2\cdot 1\cdot(-1)} e^2 + \frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{3\cdot 2\cdot 1} e^3 \\ &= \frac{-x^3+6x^2-11x+6}{6} + \frac{x^3-5x^2+6x}{2} e + \frac{-x^3+4x^2-3x}{6} e^2 + \frac{x^3-3x^2+2x}{6} e^3. \end{aligned}$$

Oppgave 6 Vis at

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

er en andre ordens approksimasjon til $f''(x)$. *Hint:* Bruk Taylor-rekker. Du kan forutsette at f er tilstrekkelig glatt.

Forslag til løsning: Taylor-utvikler $f(x \pm h)$ rundt x:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} =& \frac{1}{h^2}\Bigg(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_1) \\
& - 2f(x) \\
& + f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(\xi_2) \Bigg) \\
=& f''(x) + \frac{h^2}{4!}\Big(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) \Big) \qquad \text{(Middelverdisetningen)} \\
=& f''(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).
\end{aligned}$$

Her er $x - h < \xi_1 < x$, $x < \xi_2 < x + h$ og $\xi_1 < \xi < \xi_2$, så $x - h < \xi < x + h$. Forutsatt at $f^{(4)}(x)$ er kontinuerlig i et område rundt x så finnes en konstant C slik at $|f^{(4)}| < C$ i området, og

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| < \frac{C}{12} h^2.$$

Tilnærmelsen er av orden 2.

Oppgave 7 La $Q[f]$ være en kvadraturregel som beregner en tilnærmelse til integralet

$$I[f] = \int_a^b f(x)dx.$$

Om denne kvadraturregelen vet vi følgende: Det finnes en $s \in (a, b)$ slik at

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(s).$$

Forklar hva en kvadraturregels presisjonsgrad er, og finn presisjonsgraden til ovennevnte kvadraturregel. Svaret skal begrunnes.

Forslag til løsning: En kvardaturregel har presisjonsgrad d dersom

$$I[p] = Q[p], \qquad \text{for alle } p \in \mathbb{P}_d.$$

Et polynom av grad q er gitt ved

$$p_q(x) = a_q x^q + a_{q-1}x^{q-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Dermed er $p^{(q+1)}(x) = 0$, mens $p^{(q)}(x) \neq 0$ hvis $a_q \neq 0$.
Og vi kan konkludere med at kvadraturformelen over har presisjonsgrad 3.

Oppgave 8

a) Gitt ligningen

$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

Skriv ned en *fullstending* algoritme for å finne en tilnærmelse til $y(2)$ ved bruk av implisitt (baklengs) Eulers metode, med steglengde $h = 1/N$.

Utfør et steg med algoritmen med $h = 0.1$, dvs. finn en tilnærmelse til $y(0.1)$.

NB! Algoritmen må gjerne skrives i form av kode i f.eks. MATLAB eller Python. Den skal uansett være tilstrekkelig detaljert til at den kan implementeres.

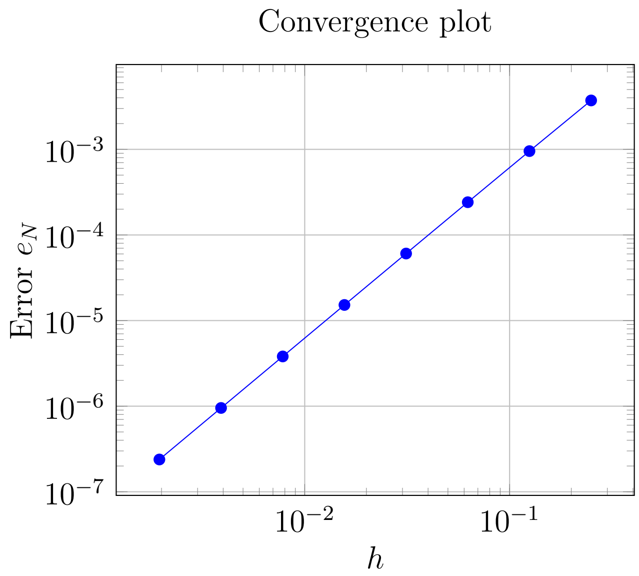
Forslag til løsning: En passende python-kode kan være:

```
from numpy import sqrt

N = 20    # Given the number of steps
h = 2/N   # or the stepsize
y = 1     # and the initial value

for n in range(N):
    y = y+h*sqrt(y)    # The Euler steps
print('y(2) is approximately ', y)
```

Et skritt med metoden er:

$$y_1 = y_0 + h\sqrt{y_0} = 1 + 0.1 \cdot 1 = 1.1.$$

b) Vi antar nå at ligningen over løses med en ikke oppgitt metode. Feilen $e_N = |y(2) - y_N|$ er målt for ulike skrittlengder $h = 2/N$, og resultatet er presentert i følgende konvergensplott:



Hva mener vi med en metodes orden, og hvordan kan ordenen leses av et konvergensplott som dette?

Hva er denne metodens orden?

Forslag til løsning: Metoden er av orden p dersom det fins en konstant $C > 0$ slik at

$$|e_N| = |y_N - y(2)| \leq Ch^p,$$

hvor $Nh = 2$ i dette eksemepelet. Når h er tilstrekkelig liten, vil man i praksis observere at

$$|e_N| \approx Ch^p \qquad \Rightarrow \qquad \log|e_N| = p \log h + \log C.$$

I et logaratimisk plott vil altså feilen som funksjon av h bli en rett linje med stigningstall p. Her ser vi at når skrittlengden reduseres med en faktor 10 vil feilen reduseres med en faktor ca. 100 (fra ca. $8 \cdot 10^{-3}$ til ca. $8 \cdot 10^{-5}$). Metodens orden er altså 2.

Oppgave 9 Vi skal løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = x - x^2$$

Skriv en fullstendig algoritme, eventuelt i form av kode, som løser problemet numerisk med et eksplisitt skjema for $t \in [0,1]$. Bruk skrittlengder $h = 1/M$ og $k = 1/N$ i henholdsvis $x-$ og $t-$retning.

La $h = 0.2$ og $k = 0.02$ og finn en approximasjon til løsningen $u(0.4, 0.02)$.

Anta at du bruker algoritmen med steglengder $h = k$. Hvordan vil du forvente at den numeriske løsningen oppfører seg over tid? Begrunn svaret.

Forslag til løsning: Velg h og k (eller M og N), la $x_i = ih$ og $t_n = kh$. For å tilnærme ligningen i et punkt (x_i, t_n), bruk en foroverdifferanse i $t-$retningen og en sentraldifferanse i $x-$retningen. Dvs:

$$\frac{u(x_i, t_n + k) - u(x_i, t_n)}{k} \approx \frac{u(x_i + h, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i - h, t_n)}{h^2}$$

La $U_i^n \approx u(x_i, t_n)$ og differenseskjemaet kan skrives som

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{k} = \frac{U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n}{h^2}.$$

Ved å inkudere start- og rand-betingelser kan algoritmen skrives som

Oppgi M og N.
Sett $h = 1/M$, $k = 1/N$ og $r = k/h^2$.
Sett inn startverdiene: $U_{i0} = ih(1 - ih), \qquad i = 0, 1, \ldots, M.$
For $n = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$\begin{aligned} U_0^{n+1} &= 0, \qquad U_M^{n+1} = 0, \\ U_i^{n+1} &= U_i^n + r(U_{i+1}^n - 2U_i^n + U_{i-1}^n), \qquad i = 1, 2 \ldots, M-1 \end{aligned}$$

Med de oppgitte steglengdene har vi $u(0.4, 0.02) \approx U_2^1$. Vi vet at

$$U_1^0 = 0.16, \qquad U_2^0 = 0.24, \qquad U_3^0 = 0.24,$$

og

$$U_2^1 = U_2^0 + r(U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0) = 0.2.$$

Med $h = k$ vil $r = k/h^2 = 1/h > 1$. Vi vet at løsningen er ustabil for $r > 0.5$, så i det tilfellet vil den numeriske løsningen eksplodere.

Algoritmen kan skrives som Python-kode:

```
import numpy as np

N = 50    # Number of steps in the t-direction
M = 5     # Number of steps in the x-direction

h = 1/M
k = 1/N
r = k/h**2

U = np.zeros((M+1,N+1))
# Array to store the solution

# Initial conditions
for i in range(M+1):
    xi = i*h
    U[i,0] = xi*(1-xi)

# Time-stepping algorithm
for n in range(N):
    for i in range(1,M):
        U[i,n+1] = U[i,n] + r*(U[i+1,n]-2*U[i,n]+U[i-1,n])
```

Fourier Transform

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx} \, \mathrm{d}w$	$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} \, \mathrm{d}x$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
$\begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w}$

Laplace Transform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) \, \mathrm{d}t$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, for $n = 0, 1, 2, \ldots, \Gamma(n+1) = n!$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$
$\delta(t - a)$	e^{-as}

$$\int x^n \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, \mathrm{d}x$$
$$\int x^n \sin ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, \mathrm{d}x$$