Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **TMA4125/30/35 Matematikk 4N/D**

Faglig kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato:

Eksamenstid (fra–til):

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: Kode C:
Bestemt, enkel kalkulator
Et stemplet gult A5-ark med egne håndskrevne notater og formler (begge sider)
Vedlagt formelark

Annen informasjon:
Alle svar må begrunnes og skal inneholde nok detaljer til at det kommer klart fram svar har framkommet.
Lykke til!

Målform/språk: bokmål

Antall sider: ??

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 La u være heavisidefunksjonen

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } t < 0 \\ 1 & \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

a) Vis at

$$\mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \text{for } a \geq 0.$$

b) Løs initialverdiproblemet

$$y''(t) + y(t) = u(t-1) \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

og skisser løsningen.

Oppgave 2 *Denne teller som totalt en deloppgave.*

a) Finn fourierrekken til funksjonen

$$f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 1$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$.

b) **KUN 4N:** Finn fouriertransformen til funksjonen $f(x) = 6x\exp(-5x^2)$.

c) **KUN 4D:** Gitt funksjonen

$$u(x,y) = xy + y^2 + e^{2x} + \sin y.$$

Beregn gradienten til u.

Oppgave 3

Finn løsningen til bølgelikningen

$$u_{tt} = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq \pi$ og $t \geq 0$, med randkrav

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$$

Oppgave 4 Utled løsningsformelen

$$u(x,t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{\frac{-(x-v)^2}{4c^2 t}} \, dv, \quad t > 0,$$

for varmelikningen

$$u_t = c^2 u_{xx},$$

på hele x-aksen med initialkrav

$$u(x,0) = f(x).$$

Oppgave 5 Finn polynomet av grad 3 som interpolerer $f(x) = e^x$ i punktene $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ og $x = 3$.

Oppgave 6 Vis at

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

er en andre ordens approksimasjon til $f''(x)$. *Hint:* Bruk Taylor-rekker. Du kan forutsette at f er tilstrekkelig glatt.

Oppgave 7 La $Q[f]$ være en kvadraturregel som beregner en tilnærmelse til integralet

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx.$$

Om denne kvadraturregelen vet vi følgende: Det finnes en $s \in (a,b)$ slik at

$$I[f] - Q[f] = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(s).$$

Forklar hva en kvadraturregels presisjonsgrad er, og finn presisjonsgraden til ovennevnte kvadraturregel.

Oppgave 8

a) Gitt initialverdiproblemet

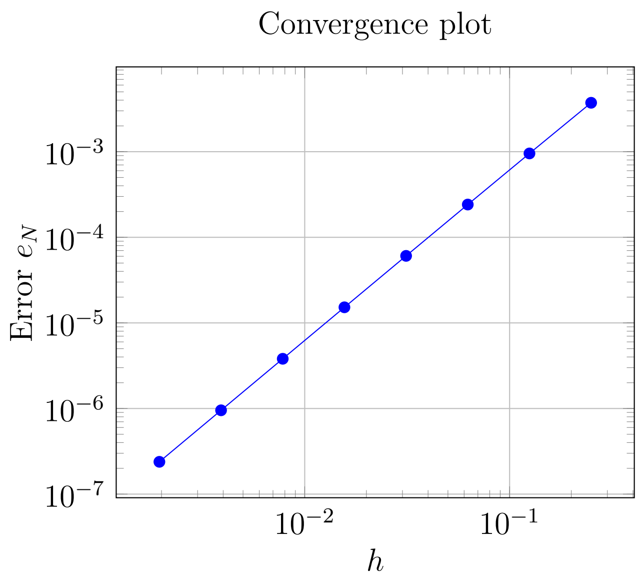
$$y' = \sqrt{y}, \quad y(0) = 1.$$

Skriv ned en *fullstending* algoritme for å finne en tilnærmelse til $y(2)$ ved bruk av implisitt (baklengs) Eulers metode, med steglengde $h = 1/N$.

Utfør et steg med algoritmen med $h = 0.1$, dvs. finn en tilnærmelse til $y(0.1)$.

NB! Algoritmen må gjerne skrives i form av kode i f.eks. MATLAB eller Python. Den skal være tilstrekkelig detaljert til at den kan implementeres.

b) Vi antar nå at ligningen over løses med en ikke oppgitt metode. Feilen $e_N = |y(2) - y_N|$ er målt for ulike skrittlengder $h = 2/N$, og resultatet er presentert i følgende konvergensplott:



Hva mener vi med en metodes orden, og hvordan kan ordenen leses av et konvergensplott som dette?

Hva er denne metodens orden?

Oppgave 9

Vi skal løse varmeligningen

$$u_t = u_{xx},$$

for $0 \leq x \leq 1$ og $t \geq 0$ med randkrav

$$u(0,t) = u(1,t) = 0$$

og initialkrav

$$u(x,0) = x - x^2$$

Skriv en fullstendig algoritme som løser problemet numerisk med et eksplisitt skjema for $t \in [0,1]$. Bruk skrittlengder $h = 1/M$ og $k = 1/N$ i henholdsvis $x-$ og $t-$retning.

La $h = 0.2$ og $k = 0.02$ og finn en approximasjon til løsningen $u(0.4, 0.02)$.

Anta at du bruker algoritmen med steglengder $h = k$. Hvordan vil du forvente at den numeriske løsningen oppfører seg over tid? Begrunn svaret.

Fouriertransform

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwx}\, \mathrm{d}w$	$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx}\, \mathrm{d}x$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{w^2 + a^2}$
$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a\|w\|}}{a}$
$\begin{cases} 1 & \text{for } \|x\| < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin wa}{w}$

Laplacetransform

$f(t)$	$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, \mathrm{d}t$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
t^n	$\frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, for $n = 0, 1, 2, \ldots$, $\Gamma(n+1) = n!$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}

$$\int x^n \cos ax\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax\, \mathrm{d}x$$
$$\int x^n \sin ax\, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax\, \mathrm{d}x$$