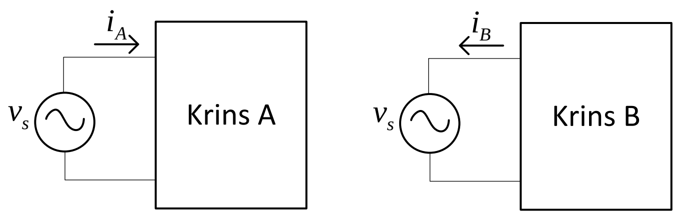
TTK 4240 – Løysingsframlegg prøvesett 1

1 EFFEKTBEREKNING I EINFASEKRETS (20 %)

Vi koblar ei spenningskjelde til to kretsar, A og B. Spenningskjelda er $v_s(t) = 141.42\cos(\omega t)$

Dette gir dei følgande straumane:

$$i_A(t) = 7.0711\cos(\omega t - 36.87^o)$$
$$i_B(t) = 21.2132\cos(\omega t - 53.13^o)$$



a)

Først set vi opp straum og spenning på visarform, og definerer spenninga til å ha vinkel 0 (referansevinkel):

$$V_s = \frac{141.42}{\sqrt{2}} e^{j0} = 100$$
$$I_A = \frac{7.0711}{\sqrt{2}} e^{-j36.87} = 5e^{-j36.87}$$
$$I_B = \frac{21.2132}{\sqrt{2}} e^{-j53.13} = 15e^{-j53.13}$$

Fallgruve: Oppgåva oppgir amplitudeverdiar, men det er generelt anbefalt å rekne med RMS. Viss ikkje er vi nødt til å dele på 2 kvar gong vi skal finne effekt. Dette forklarer kvifor det er delt på $\sqrt{2}$ i uttrykka ovanfor.

For å finne kompleks effekt kan vi bruke definisjonen:

$$S = V \cdot I^*$$

Dette gir:

$$S_A = V_s \cdot I_A^* = 100 \cdot \left(5e^{-j36.87}\right)^* = 500e^{j36.87}\ VA$$
$$P_A = 500\cos\left(36.87\right) = 400\ W$$
$$Q_A = 500\sin\left(36.87\right) = 300\ VAr$$

$$S_B = V_s \cdot I_B^* = 100 \cdot \left(15e^{-j53.13}\right)^* = 1500e^{j53.13}\ VA$$
$$P_B = 1500\cos\left(53.13\right) = 900\ W$$
$$Q_B = 1500\sin\left(53.13\right) = 1200\ VAr$$

b)

For å bestemme om kretsen produserer eller forbruker aktiv effekt, må vi sjå på kva veg straumen er definert. For krets A er straumen definert inn i kretsen sin positive terminal, dermed har vi rekna ut effekten som blir forbrukt. I krets B er straumen definert ut av kretsen sin positive terminal, dermed har vi rekna ut effekten som blir produsert. Men i tillegg til desse observasjonane må vi også sjå på forteikna til effektane vi har funne. Sidan begge aktive effektane er positive, har vi følgande konklusjon:

Krets A forbruker 400 W, krets B produserer 900 W

For å bestemme om kretsen er induktiv (oppfører seg som ein spole) eller kapasitiv (oppfører seg som ein kondensator), er det nok å bestemme om den forbruker (=induktiv) eller produserer (=kapasitiv) reaktiv effekt.

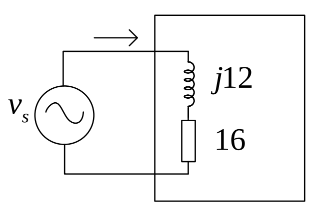
Basert på diskusjonen om aktiv effekt har vi at krets A forbruker 300 VAr og er induktiv. Krets B produserer 1200 VAr og er kapasitiv.

c)

For å finne ekvivalent impedans til krets A kan vi dele kompleks spenning på straum:

$$Z_A = \frac{V_A}{I_A} = \frac{100e^{j0}}{5e^{-j36.87}} = 20e^{j36.87} = 16 + j12$$

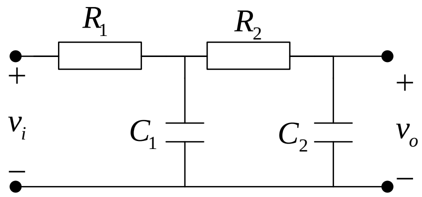
Dermed kan vi representere krets A slik:



Verdien til L blir dermed $L = \frac{12}{\omega} = \frac{12}{2\pi 50} = 38.2\ mH$

Det gir ikkje meining å gjere det same for krets B, sidan vi då kjem til å ende opp med ein motstand med negativ verdi (for at vi skal få ein krets som produserer aktiv effekt).

2 ANDRE ORDENS FILTER



$R_1 = 2\ k\Omega$
$R_2 = 3\ k\Omega$
$C_1 = 1\ mF$
$C_2 = 1\ mF$

a) Kva slags type filter er dette? (lavpass, høgpass, bandpass eller bandstopp) Begrunn svaret kort.
b) Finn transferfunksjonen til filteret (vis at…)
c) Finn eventuelle polar og nullpunkt til transferfunksjonen
d) Finn knekkfrekvensen (cutoff frequency) til filteret

a)

Dette er eit lavpassfilter sidan utgangen blir lik inngangen ved låge frekvensar, og utgangen blir lik null for høge frekvensar.

b)

Ein måte for å finne transferfunksjonen er ved å først finne eit uttrykk for «midtpunktsspenninga» V_m som er spenninga over kondensatoren C_1 :

$$H_m(s) = \frac{V_m}{V_i} = \frac{Z_x}{R_1 + Z_x} = \frac{1}{\dfrac{R_1}{Z_x} + 1} = \frac{1}{R_1\left(sC_1 + \dfrac{sC_2}{sR_2C_2 + 1}\right) + 1}$$

Kan deretter finne utgongsspenninga ved spenningsdeling mellom C_2 og R_2 :

$$V_o = V_m \frac{\dfrac{1}{sC_2}}{R_2 + \dfrac{1}{sC_2}} = V_m \frac{1}{sR_2C_2 + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_m}{V_i}\frac{V_o}{V_m} = \frac{1}{R_1\left(sC_1 + \dfrac{sC_2}{sR_2C_2 + 1}\right) + 1} \cdot \frac{1}{sR_2C_2 + 1} = \frac{1}{s^2 R_1R_2C_1C_2 + s\left(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2\right) + 1}$$

Innsatt talverdiar:

$$H(s) = \frac{1}{6s^2 + 7s + 1}$$

c)

Det er mogeleg å faktorisere denne andregradsfunksjonen til (for eksempel ved abc-formelen):

$$H(s) = \frac{1}{(6s+1)(s+1)}$$

Transferfunksjonen har dermed to polar (der nemnar blir null):

$$s = -\frac{1}{6}$$
$$s = -1$$

Transferfunksjonen har ingen nullpunkt (der teljar blir null)

d)

For å finne knekkfrekvensen ser vi først at den maksimale amplituden til transferfunksjonen er 1 (ved s=0). Knekkfrekvensen er dermed den frekvensen der amplituden er lik $\left|H(j\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\left|H(j\omega_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \left|\frac{1}{6(j\omega_c)^2 + 7(j\omega_c) + 1}\right| = \left|\frac{1}{1-6\omega_c{}^2 + j7\omega_c}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(1-6\omega_c{}^2\right)^2 + 49\omega_c{}^2}}$$

$$\left(1-6\omega_c{}^2\right)^2 + 49\omega_c{}^2 = 2$$
$$1 - 12\omega_c{}^2 + 36\omega_c{}^4 + 49\omega_c^2 = 2$$
$$36\omega_c{}^4 + 37\omega_c^2 - 1 = 0$$
abc-formelen:
$$\omega_c^2 = 0.02635 \vee \omega_c^2 = -1.0541$$

Den einaste reelle positive løysinga til knekkfrekvens er dermed:

$$\omega_c = \sqrt{0.02635} = 0.1623 \text{ rad/s}$$

3 STASJONÆR OG DYNAMISK KRETSANALYSE

Fallgruve: I oppgåveteksten er amplitudeverdien til v_s oppgitt. Det er meir hensiktsmessig å rekne med RMS, viss ikkje er det fort gjort å få feil svar i oppgåve c) når vi skal finne aktiv og reaktiv effekt. Viss ein brukar amplitudeverdiar må ein nemleg hugse å dele på 2 når ein reknar ut effekt. Så det anbefalast å alltid bruke RMS!

Vi ønskjer å bruke visarrekning. Definerer vinkelen til kjelda lik null, dvs. $V_s = \dfrac{339.41}{\sqrt{2}} e^{j0} = 240\,V$,

Merk: her har vi rekna om frå amplitudeverdi til RMS.

Finn først total impedans sett frå kjelda:

$$Z_{tot} = R_1 + j\omega L_1 + \frac{R_2\, j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2}$$

Fallgruve: I oppgåveteksten er frekvensen *f* oppgitt, men vi må huske å multiplisere med 2π for å få ω som har eining rad/s. Denne fallgruva kjem til å heimsøke dei fleste også i mange kybernetikkfag der ein brukar Hertz og rad/s om kvarandre.

Med talverdiar:

$$Z_{tot} = 0.1 + j0.6283 + \frac{j314.16}{10 + j31.416} = 9.1800 + j3.5186\,\Omega$$

Kan så finne strømmen I_S direkte:

$$I_s = \frac{V_s}{Z_{tot}} = \frac{240}{9.1800 + j3.5186} = \frac{240}{9.8312 e^{j20.97}} = 24.4121 e^{-j20.97}\ A$$

Kan så finne I_R og I_L ved hjelp av straumdeling:

$$I_R = I_s \cdot \frac{j\omega L_2}{R_2 + j\omega L_2} = I_s \cdot \frac{j31.416}{10 + j31.416} = 24.4121 e^{-j20.97} \cdot 0.9529 e^{j17.65} = 23.262 e^{-j3.32}$$

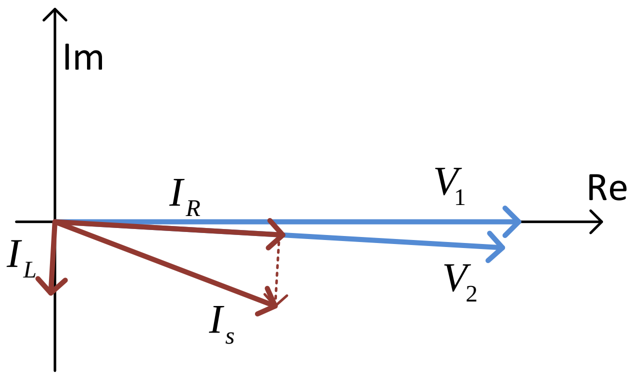
$$I_L = I_s \cdot \frac{R_2}{R_2 + j\omega L_2} = I_s \cdot \frac{10}{10 + j31.416} = 24.4121 e^{-j20.97} \cdot 0.3033 e^{-j72.34} = 7.4042 e^{-j93.31}$$

Kan til slutt finne V_2 på mange måtar, for eksempel:

$$V_2 = R_2 I_R = 10 \cdot 23.262 e^{-j3.32} = 232.62 e^{-j3.32}$$

b)

Følgande figur syner visardiagrammet til systemet. Vi ser at dei to spenningane er forholdsvis like, samt at kjeldestraumen er lik $I_s = I_R + I_L$



c)

Tilført effekt kan finnast frå definisjonen:

$$S_s = V_s I_s^* = 240e^{j0} \cdot \left(24.4121e^{-j20.97}\right)^* = 5859e^{j20.97}\ VA$$
$$P_s = 5471\,W$$
$$Q_s = 2097\ VAr$$

Tapa i motstanden R_1 finnast enklast ved følgande relasjon:

$$P_{R1} = R_1 I_1 I_1^* = R_1 \left|I_1\right|^2 = 0.1 \cdot 24.4121^2 = 59.6\,W$$

Kontroll: Summen av forbrukt effekt i krinsen skal vere lik tilført effekt. Dette gjeld både for aktiv og reaktiv.

$$P_s = P_{R1} + P_{R2} = R_1 \left|I_s\right|^2 + \frac{\left|V_2\right|^2}{R_2} = 59.6 + \frac{232.62^2}{10} = 5741\,W$$
$$Q_s = Q_{L1} + Q_{L2} = \omega L_1 \left|I_s\right|^2 + \frac{\left|V_2\right|^2}{\omega L_2} = 374.4 + \frac{232.62^2}{31.41} = 2097\ VAr$$

som er identisk med effekt tilført frå kjelda.

d)

For å finne straumen i_L ved $t = 0$ kan vi setje opp tidsfunksjonen basert på visaren:

$$i_L(t) = \sqrt{2}\left|I_L\right| \cdot \cos\left(\omega t + \angle I_L\right) = \sqrt{2} \cdot 7.4042 \cos\left(\omega t - 1.6286\right)$$

Fallgruve: Her har vi gjort om vinkelen til I_L frå grader til radianar. Dette er veldig viktig sidan ωt har eining radianar. I denne typen oppgåver må vi alltid vere obs på grader vs. radianar.

<u>Fallgruve</u>: Framfor $\cos(\omega t)$ skal det alltid stå amplitudeverdi. Dvs., når vi reknar med RMS-visarar må vi multiplisere igjen med $\sqrt{2}$ når vi skal finne tidsfunksjonar.

Set inn $t = 0$:

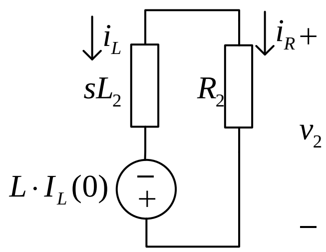
$$i_L(0) = \sqrt{2} \cdot 7.4042 \cos(-1.6286) = -0.6049\ A$$

e)

Merk først at når brytaren er open så kan det ikkje gå straum i R_1, L_1. Vi har dermed:

$$i_s(t) = 0$$

Ønskjer å løyse krinsen med Laplace, teiknar følgande krins i s-domenet (kan sjå bort frå R_1 og L_1):



Brukar Kirchoffs speningslov for å finne $I_L(s)$ (NB: Ver obs på forteikn!) :

$$L_2 \cdot i_L(0) = I_L \cdot (sL_2 + R_2)$$
$$I_L = \frac{L_2 \cdot i_L(0)}{sL_2 + R_2} = \frac{i_L(0)}{s + \frac{R_2}{L_2}}$$

Kan så benytte invers laplacetransformasjon for å finne $i_L(t)$:

$$i_L(t) = i_L(0) \cdot e^{-\frac{R_2}{L_2}t} = -0.6049 e^{-100t}\ A$$

Kan dermed finne dei andre størrelsane det blei spurt etter i oppgåva:

$$i_R(t) = -i_L(t) = 0.6049 e^{-100t}\ A$$
$$v_2(t) = Ri_R(t) = 6.049 e^{-100t}\ V$$

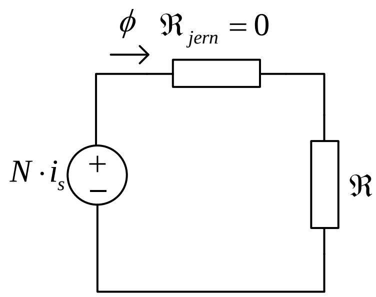
4 STASJONÆR ANALYSE AV JERNKJERNE (30 %)

a)

Frå Faradays lov (vedlegg) har vi at den induserte spenninga til viklinga blir

$$\varepsilon = N\frac{d\varphi}{dt}$$

Vi ønskjer å setje opp ein magnetisk kretsekvivalent til jernkjerna, sjå følgande figur:



Reluktansen til kjerna er lik reluktansen til luftgapet sidan jernet har uendeleg permeabilitet:

$$\Re = \frac{l_g}{\mu_o A_g}$$

Dermed blir likninga for den magnetiske kretsen:

$$N \cdot i_s(t) = \Re\varphi = \frac{l_g \varphi}{\mu_o A_g}$$

Kan setje dette inn i Faradays lov:

$$\varepsilon = N\frac{d\left(\frac{Ni_s(t)}{\Re}\right)}{dt} = \frac{N^2\mu_o A_g}{l_g}\frac{di_s(t)}{dt}$$

Ved å samanlikne dette med likninga for ein spole $v_L = L\frac{di_L}{dt}$, ser vi at ε er spenninga over spolen og i_s er straumen gjennom spolen. Dermed kan vi konkludere med at $L_{eq} = \frac{N^2\mu_o A_g}{l_g}$

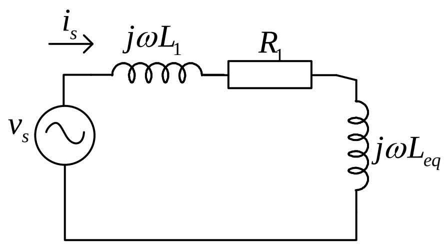
Innsett talverdiar: $L_{eq} = 5.03\,mH$

b)

Fluksen vil gå <u>mot</u> klokka når straumen i_s er positiv. Dette finn vi ved å legge høgre hand rundt viklinga i same retning som straumen. Tommelen vil då peike nedover, som indikerer fluksretning mot klokka.

c)

Basert på resultatet frå a) kan vi setje opp følgande ekvivalente krets:



På visarform blir spenninga lik $V_s = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}$ (vi kan definere spenninga sin vinkel til å vere 0)

Dermed blir straumen lik:

$$I_s = \frac{V_s}{R_1 + j\omega\left(L_1 + L_{eq}\right)} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}}{0.2 + j\omega\left(5\cdot 10^{-3} + 5.03\cdot 10^{-3}\right)} = \frac{\frac{100}{\sqrt{2}}}{3.1573 e^{j86.37}} = 22.39 e^{-j86.37}\ A$$

d)

$\left|S_{\max}\right| = 2500$ betyr at maksimal RMS-straum frå kjelda blir $\left|I_{\max}\right| = \frac{2500}{\frac{100}{\sqrt{2}}} = 35.36\ A$

Vi ser frå uttrykket i c) at straumen aukar når den totale induktansen minkar. Frå formelen i a) ser vi at induktansen til viklinga blir redusert når luftgapet aukar.

Set opp absoluttverdien til impedansen sett frå kjelda:

$$\left|Z_s\right| = \left|R_1 + j\omega\left(L_1 + L_{eq}\right)\right| = \left|\frac{V_s}{I_s}\right|$$

Løyser denne for L_{eq} :

$$R_1^2 + \omega^2\left(L_1 + L_{eq}\right)^2 = \left|\frac{V_s}{I_s}\right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad L_{eq} = \sqrt{\frac{\left|\frac{V_s}{I_s}\right|^2 - R_1^2}{\omega^2}} - L_1$$

Set vi inn maksimalverdien til straumen $I_s = I_{\max} = 35.36\ A$ får vi:

$$L_{eq} = \sqrt{\frac{\left(\frac{100}{\sqrt{2}\cdot 35.36}\right)^2 - 0.2^2}{314.15^2}} - 5\cdot 10^{-3} = 1.33\, mH$$

Dette tilsvarer ei luftgapslengd:

$$l_g = \frac{N^2 \mu_o A_g}{L_{eq}} = \frac{100^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^{-4}}{1.33 \cdot 10^{-3}} = 3.78\, mm$$

Med andre ord, så lenge $l_g < 3.78\, mm$ så vil tilsynelatande effekt frå kjelda vere mindre enn den maksimale verdien.

e)

Likninga for den magnetiske kretsen:

$$Ni_s(t) = \frac{l_g}{\mu_o A_g}\varphi(t) = B\frac{l_g}{\mu_o} \Rightarrow i_s(t) = B(t)\frac{l_g}{N\mu_o}$$

Denne er også gyldig på visarform:

$I_s = B\frac{l_g}{N\mu_o}$, der *B* er magnetisk flukstettleik på visarform.

Likning for den elektriske kretsen (på visarform), med $R_1 = 0$:

$$V_s = j\omega\left(L_1 + L_{eq}\right)I_s = j\omega\left(L_1 + \frac{N^2\mu_o A_g}{l_g}\right)I_s$$

Sidan vi berre er interessert i absoluttverdien til *B* kan vi ta absoluttverdi:

$$|V_s| = \omega\left(L_1 + \frac{N^2\mu_o A_g}{l_g}\right)|I_s|$$

Set så inn uttrykket for straumen frå magnetisk kretslikning:

$$|V_s| = \omega\left(L_1 + \frac{N^2\mu_o A_g}{l_g}\right)\cdot|B|\frac{l_g}{N\mu_o}$$

$$|B|\omega = \frac{\dfrac{|V_s|N\mu_o}{l_g}}{\left(L_1 + \dfrac{N^2\mu_o A_g}{l_g}\right)} = \frac{|V_s|N\mu_o}{\left(L_1 l_g + N^2\mu_o A_g\right)}$$

Frå dette uttrykket kan vi konkludere med at $B < B_{\max}$ er ekvivalent med

$$\omega > \frac{V_{rms}N\mu_o}{B_{\max}\left(L_1 l_g + N^2\mu_o A_g\right)} \qquad \text{og} \qquad f > \frac{V_{rms}N\mu_o}{2\pi B_{\max}\left(L_1 l_g + N^2\mu_o A_g\right)}$$