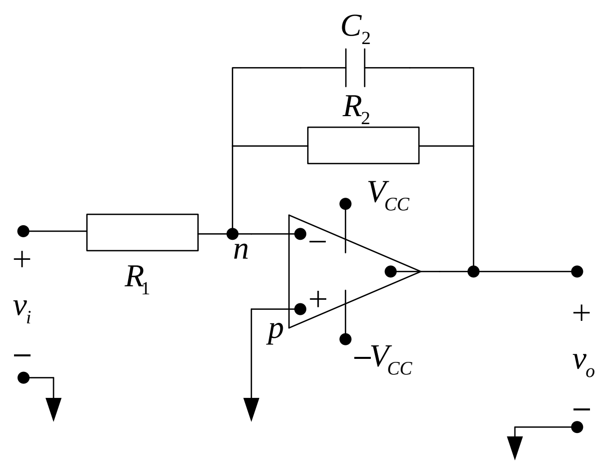
TTK 4240 – Løysingsframlegg prøvesett 2

1 DESIGN AV AKTIVT LAVPASSFILTER (25 %)

Figur 1 viser et aktivt lavpassfilter. Vi skal gjennom hele oppgaven anta at operasjonsforsterkeren er ideell, samt opererer i det lineære området.



Figur 1: Aktivt lavpassfilter

a) Finn transferfunksjonen mellom inngang og utgang, dvs. $H(s)=\frac{V_o}{V_i}$

Ved å bruke antagelse om ideell operasjonsforsterkar har vi at $V_n = V_p = 0$. I tillegg går det ingen straum inn på negativ terminal, dermed har vi frå Kirchoffs straumlov i punkt *n:*

$$\frac{V_n - V_i}{R_1} + (V_n - V_o)\left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) = 0$$

Ved å setje inn $V_n = 0$ får vi:

$$\frac{-V_i}{R_1} - V_o\left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right) = 0$$

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\left(\frac{1}{R_2} + sC_2\right)} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{sR_2C_2 + 1}$$

b) Finn et uttrykk for knekkfrekvensen ω_c til filteret

Knekkfrekvensen er den frekvensen som gir $\left|H\left(j\omega_c\right)\right| = \frac{\left|H_{\max}\right|}{\sqrt{2}}$, der $\left|H_{\max}\right|$ er den maksimale verdien som transferfunksjonen kan oppnå. I dette lavpassfilteret ser vi at $\left|H_{\max}\right| = \frac{R_2}{R_1}$ (når $s = 0$).

Vi har dermed:

$$\left|H\left(j\omega_c\right)\right| = \frac{\left|H_{\max}\right|}{\sqrt{2}} =$$

$$\Rightarrow \left|-\frac{R_2}{R_1}\frac{1}{j\omega_c R_2 C_2 + 1}\right| = \frac{\frac{R_2}{R_1}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_c R_2 C_2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \omega_c R_2 C_2 = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{R_2 C_2}$$

Vi skal nå bestemme verdiene til filteret basert på følgende:

- $C_2 = 100\ \mu F$
- Når V_i er konstant, skal $\left|V_o\right| = \left|V_i\right|$
- Når $f = 10\ kHz$ skal $\frac{\left|V_o\right|}{\left|V_i\right|} = \frac{1}{100}$

c) Finn verdiene til R_1 og R_2 som oppfyller dette.

Betingelsen om at når V_i er konstant, skal $\left|V_o\right| = \left|V_i\right|$, er ekvivalent med at $\left|H\left(s=0\right)\right| = \frac{\left|V_o\right|}{\left|V_i\right|} = 1$

Sidan $H\left(s=0\right) = -\frac{R_2}{R_1}$ får vi dermed $R_2 = R_1$.

Den andre betingelsen er betyr at $\left|H\right| = \frac{\left|V_o\right|}{\left|V_i\right|} = \frac{1}{100}$ når $f = 10\ kHz$. Uttrykket for absoluttverdien er:

$$\left|H\left(j\omega\right)\right| = \frac{R_2}{R_1}\left|\frac{1}{j\omega R_2 C_2 + 1}\right|$$

Innsatt talverdiar, samt at $R_1 = R_2$ (Hugs å multiplisere med 2π for å finne ω):

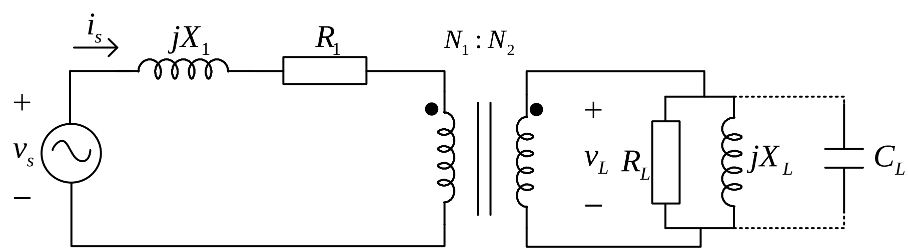
$$\left|H\left(j\omega\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{1+\left(2\pi 10^4 \cdot R_2 \cdot 100 \cdot 10^{-6}\right)^2}}\right| = \frac{1}{100} \Rightarrow \sqrt{1+\left(2\pi \cdot R_2\right)^2} = 100 \Rightarrow R_2 = 15.915\,\Omega$$

Svaret blir dermed $R_1 = R_2 = 15.915\,\Omega$

2 STASJONÆRE BEREGNINGER PÅ VEKSELSSTRØMKRETS

Figur 2 viser en krets som består av forsyning (v_s), overføringsimpedans ($R_1 + jX_1$), en ideell transformator med omsetningsforhold $N_1 : N_2$, samt en last ($R_L \parallel jX_L$). Bruk følgende tallverdier:

$V_s = 1000\,V\ (rms)$
$R_1 = 0.5\,\Omega$
$X_1 = 5\,\Omega$
$R_L = 0.5\,\Omega$
$X_L = 2\,\Omega$
$f = 50\,Hz$



Figur 2: Forsyning av last via impedans og transformator

I oppgave a og b ser vi bort fra kondensatoren C_L vist i figuren.

Anta i oppgave a og b at $\frac{N_1}{N_2} = 10$.

a) Vis at ekvivalent impedans sett fra kilden er lik $Z_{eq} = 50.43e^{j19.42}\ \Omega$

Bruker regelen om at vi kan referere en impedans til andre siden av en transformator gjennom å multiplisere med omsetningsforholdet kvadrert. Dette har vi utledet i øving 3.

Kan dermed sette opp uttrykket for ekvivalent impedans direkte:

$$Z_{eq} = R_1 + jX_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{R_L\, jX_L}{R_L + jX_L}\right)$$

Innsatt tallverdier:

$$Z_{eq} = 0.5 + j5 + 100 \cdot \left(\frac{j0.5 \cdot 2}{0.5 + j2}\right) = 47.56 + j16.765 = 50.43e^{j19.42}\ \Omega$$

(mellomregning med komplekse tall er ikke vist her)

b) Hva blir aktiv og reaktiv effekt tilført fra kilden i oppgave a)?

Kan finne aktiv og reaktiv effekt på to måter, det enkleste er å bruke spenning og impedans direkte:

$$S_s = V_s I_s^* = V_s \left(\frac{V_s}{Z_{eq}} \right)^* = \frac{|V_s|^2}{Z_{eq}^*} = \frac{1000^2}{\left(50.43e^{j19.42}\right)^*} = 19831e^{j19.42}\ VA$$

$$P = 19831\cos(19.42) = 18.70\ kW$$
$$Q = 19831\sin(19.42) = 6.593\ kVAr$$

Vi kunne også funnet strømmen, og deretter satt inn i definisjonen på kompleks effekt, dette ville gitt identisk svar.

Anta nå at kondensatoren C_L er tilkoblet som vist på figuren.

c) Hvilken verdi av C_L minimerer kildestrømmen I_s ?

Når reaktiv effekt forsynt til lasten skal være null må parallellkoblingen mellom spolen og kondensatoren kansellerer hverandre (=uendelig impedans). Da står vi igjen med R_L, som kun forbruker aktiv effekt. En lignende oppgave ble gitt i øving 3.

Impedansen i parallellkoblingen mellom spolen og kondensatoren er:

$$jX_L \,||\, \frac{1}{j\omega C_L} = \frac{jX_L \cdot \frac{1}{j\omega C_L}}{jX_L + \frac{1}{j\omega C_L}}$$

Denne er uendelig hvis $jX_L + \frac{1}{j\omega C_L} = 0$, som gir:

$$C_L = \frac{1}{\omega X_L} = \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 2} = 1.591\ mF$$

d) Hva blir $Z_{eq} = \frac{V_s}{I_s}$ med denne verdien av C_L ?

Uttrykket fra oppgave b) blir nå forenklet siden C_L blir brukt til å kansellere impedansen til spolen:

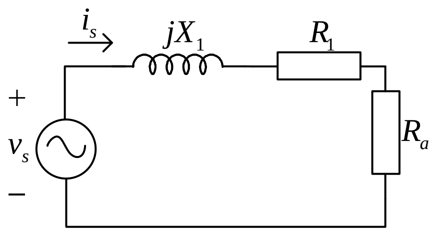
$$Z_{eq} = R_1 + jX_1 + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \cdot R_L$$

Innsatt tallverdier: $Z_{eq} = 0.5 + j5 + 100 \cdot 0.5 = 50.5 + j5 = 50.75e^{j5.65}\ \Omega$

Anta at transformatoren er utstyrt med en regulator som kan kontrollere $N_1 : N_2$ innenfor et visst område. Dette kalles transformatortrinning (tap changer).

e) Kondensatoren C_L er fortsatt koblet til. Hva må transformatorforholdet $N_1 : N_2$ være hvis R_L skal forbruke $P_L = 20\ kW$? (Det er to gyldige svar på dette spørsmålet, men det ene er mer realistisk enn det andre)

Dette er en vanskelig oppgave. En måte å angripe den på er å representere transformator+last med en ekvivalent motstand R_a som vist i følgende figur (vi vet at denne impedansen må være rent reell siden det er ingen netto forbruk av reaktiv effekt i lasten):



Finner så den verdien av R_a som gir $P_L = 20\,kW$, og kan deretter finne omsetningsforholdet siden vi vet R_L

$$P_L = R_a |I_s|^2 = R_a \left| \frac{V_s}{R_1 + jX_1 + R_a} \right|^2 = |V_s|^2 \frac{R_a}{(R_1 + R_a)^2 + X_1^2}$$

Innsatt tallverdier:

$$20 \cdot 10^3 = 1000^2 \frac{R_a}{(0.5 + R_a)^2 + 5^2}$$

$$(0.5 + R_a)^2 + 5^2 = 50 R_a$$

$$R_a^2 + R_a(1 - 50) + 25.25 = 0$$

$$R_a = 48.479\,\Omega \;\vee\; R_a = 0.5208\,\Omega$$

Siden forholdet mellom R_a og R_L er gitt av omsetningsforholdet kvadrert, har vi:

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 = \frac{R_a}{R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 9.847 \;\vee\; \frac{N_1}{N_2} = 1.0206$$

Det er den første løsningen som er mest realistisk siden den andre løsningen gjør at total impedans sett fra kilden blir svært liten, noe som resulterer i en høy strøm og en gigantisk reaktiv effekt forbrukt i X_1. Dette resonnementet er ikke nødvendig for å få full uttelling på oppgaven.

3 EFFEKTBEREGNINGER I MOTORDRIFT

Anta at lasten driftes på nominelt turtall.

a) I nominelle forhold, vis at effekt overført til last blir lik $P_{nom} = 62.83\, kW$

Svar: Regner først om lastens nominelle turtall til rad/s:

$$\omega_{mek,nom} = 1500\left[\frac{\text{o}}{\text{min}}\right]\cdot\frac{1}{60}\left[\frac{\text{min}}{s}\right]\cdot 2\pi\left[\frac{\text{rad}}{\text{o}}\right] = 157.08 \text{ rad/s}$$

Ser at momentet blir lik $T_{load,nom} = 400\cdot\left(\frac{\omega_{nom}}{\omega_{nom}}\right)^2 = 400\ Nm$, og effekten blir da lik:

$$P_{nom} = \omega_{mek,nom}T_{nom} = 157.08\cdot 400 = 62.83\, kW$$

b) Hva blir frekvensen til motorspenningen, i Hz?

Denne finnes direkte fra antall poler siden vi ikke har mekanisk gir:

$$f_{el} = \frac{p}{2} f_{mek} = \frac{4}{2}\cdot 1500\frac{\text{o}}{\text{min}}\cdot\frac{1}{60}\frac{\text{min}}{\text{s}} = 50\ Hz$$

c) Se bort fra alle tap i systemet. Hva blir batteristrømmen I_{batt} og strømmen i motoren $|I_{mot}|$?

Svar: Siden den samme effekten leveres fra batteriet har vi at

$$P_{nom} = V_{batt}I_{batt} \Rightarrow I_{batt} = \frac{P_{nom}}{V_{batt}} = \frac{62830}{600} = 104.7\ A$$

For å finne strømmen i motoren må vi ta hensyn til at dette er en trefasemotor. Finner først fasespenningen:

$$|V_{ph}| = \frac{|V_{LL}|}{\sqrt{3}} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230.94\, V$$

Effekten per fase blir:

$$P_{ph} = \frac{P_{nom}}{3} = \frac{62.83}{3} = 20.94\ kW$$

Før vi kan finne strømmen må vi finne den tilsynelatende effekten. Effektfaktoren er $\cos\varphi = 0.9$, og vi har at $P = |S|\cos\varphi$. Dermed blir tilsynelatende effekt per fase lik:

$$|S_{ph}| = \frac{20.94}{0.9} = 23.27\ kVA$$

Dette gir motorstrømmen:

$$\left|I_{mot}\right| = \frac{\left|S_{ph}\right|}{\left|V_{ph}\right|} = \frac{23.27 \cdot 10^3}{230.94} = 100.76\ A$$

Lastens effektbehov reduseres så til det halve

d) Lastens effektbehov (målt i watt) reduseres så til det halve. Hva blir den nye frekvensen til motorspenningen?

Det nye effektbehovet blir dermed

$$P_L = \frac{P_{nom}}{2} = \frac{62.83}{2} = 31.415\ kW$$

Kan dermed finne det nye mekaniske turtallet:

$$P_L = T_{load}\omega_{mek} = 400\left(\frac{\omega_{mek}}{\omega_{mek,nom}}\right)^2 \omega_{mek}$$

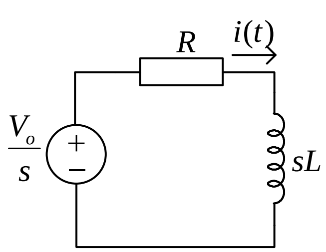
$$\Rightarrow \omega_{mek} = \sqrt[3]{\frac{P_L \cdot \omega_{mek,nom}^2}{400}} = \sqrt[3]{\frac{31415 \cdot 157.08^2}{400}} = 124.67 \text{ rad/s}$$

Dette gir følgende frekvens til motorspenningen:

$$f_{el} = \frac{p}{2} f_{mek} = \frac{p}{2}\frac{\omega_{mek}}{2\pi} = \frac{4}{2}\frac{1}{2\pi} \cdot 124.67 = 39.68 \text{ Hz}$$

4 Transientberegning ved Laplacetransformasjo

a) Tegner kretsen på nytt i Laplace-domenet, hvor vi bruker at den laplacetransformerte til et sprang er lik $\frac{1}{s}$:



Setter opp uttrykket for $I_s(s)$:

$$I_s = \frac{\frac{V_o}{s}}{R + sL} = \frac{V_o}{s\left(R + sL\right)}$$

Bruker så delbrøksoppspalting:

$$\frac{V_o}{s(R+sL)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{R+sL}$$

Kan løse dette på mange måter, for eksempel

$$A(R+sL)+Bs=V_o$$
$$\Rightarrow AR=V_o \quad AL+B=0$$
$$\Rightarrow A=\frac{V_o}{R} \quad B=-L\frac{V_o}{R}$$

Vi har da at:

$$I_s=\frac{V_o}{R}\cdot\frac{1}{s}-\frac{LV_o}{R}\frac{1}{(R+sL)}=\frac{V_o}{R}\cdot\frac{1}{s}-\frac{V_o}{R}\frac{1}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}$$

Dette har invers laplacetransformasjon lik:

$$i_s(t)=\frac{V_o}{R}-\frac{V_o}{R}e^{-\frac{R}{L}t},\ t\geq 0$$

Innsatt tallverdier:

$$i_s(t)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{-2t},\ t\geq 0$$

b)

Transferfunksjonen blir lik

$$H(s)=\frac{I}{V_o}=\frac{1}{Z_{tot}(s)}=\frac{1}{R+sL+\frac{1}{sC}}=\frac{sC}{s^2LC+sRC+1}=\frac{1}{L}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}$$

Innsatt numeriske verdier:

$$H(s)=\frac{s}{s^2+2s+10}$$

c)

Med påtrykt sprangspenning så blir den laplacetransformerte til spenningen lik:

$V(s)=\frac{V_o}{s}$, hvor $V_o=3V$

Den laplacetransformerte til strømmen blir da:

$$I(s)=\frac{V_o}{s}\cdot H(s)=\frac{V_o}{s}\frac{s}{s^2+2s+10}=\frac{3}{s^2+2s+10}$$

Vi ønsker å sette dette på formen

$$k \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = k \frac{\omega}{s^2 + 2as + a^2 + \omega^2}$$

Ved å sammenligne uttrykkene ser vi at $a = 1$ pga førstegradsleddet

Vi har dermed at $a^2 + \omega^2 = 10 \Rightarrow \omega = 3$

(Vi forkaster negativ løsning for ω, selv om det ikke er direkte feil å inkludere den)

Til slutt ser vi at $3 = k\omega \Rightarrow k = 1$

For å oppsummere så kan vi skrive den laplacetransformerte til strømmen som:

$$I(s) = \frac{3}{(s+1)^2 + 3^2}$$

Den inverstransformerte kan hentes direkte fra tabellen i vedlegg:

$$i(t) = e^{-t} \sin\left(3t\right)$$