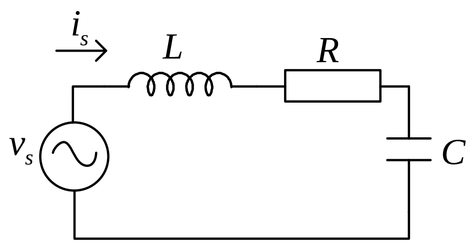
LF Prøvesett 3

1 Stasjonære berekningar på RLC-krets

Figur 1 viser ein RLC-krets forsynt frå ei spenningskjelde. Bruk følgande talverdiar:

$$R = 1\,\Omega$$
$$L = 10\ mH$$
$$C = 2\ mF$$
$$f = 50\ Hz$$
$$v_s = 100\cos(\omega t)$$



Figur 1: RLC-seriekrets

a) Finn V_s, I_s (på visarform), samt den komplekse effekt S_s , aktiv effekt P_s og reaktiv effekt Q_s

Svar:

Veljer å bruke RMS-verdiar i visarberekningar, dette er sterkt anbefalt gjennom heile faget. Grunnen er at då slepp vi å dele på to for å finne effekt. Definerer at spenningsvisaren har vinkel 0:

$$V_s = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}$$

Straumen får vi ved å dele spenning på total impedans:

$$I_s = \frac{V_s}{j\omega L + R + \dfrac{1}{j\omega C}} = \frac{100/\sqrt{2}}{j\cdot 2\pi\cdot 50\cdot 10\cdot 10^{-3} + 1 + \dfrac{1}{j\cdot 2\pi\cdot 50\cdot 2\cdot 10^{-3}}} = \frac{70.71}{j3.1415 + 1 - j1.5915}$$
$$= \frac{70.71}{1 + j1.55} = \frac{70.71}{1.885e^{j57.17}} = 37.512e^{-j57.17}\ A$$

Effekten blir då:

$$S_s = V_s I_s^* = \frac{100}{\sqrt{2}} e^{j0}\cdot\left(37.512e^{-j57.17}\right)^* = 2652.5e^{j57.17}\ VA$$
$$P = 2652.5\cos 57.17 = 1438\,W$$
$$Q = 2652.5\sin 57.17 = 2229\,VAr$$

b) Finn $i_s(t)$ og $P_s(t)$

Den klart enklaste metoden for å finne $i_s(t)$ er å gjere visaren I_s om til tidsfunksjon:

$$i_s(t) = \sqrt{2} \cdot 37.512\cos\left(\omega t - 57.17^o\right) = 53.05\cos\left(\omega t - 57.17^o\right)$$

Kan deretter finne momentaneffekten/tidsfunksjonen $P_s(t)$ som produktet av strøm og spenning:

$$P_s(t) = v_s(t) \cdot i_s(t) = 100\cos\left(\omega t\right) \cdot 53.05\cos\left(\omega t - 57.17^o\right) = 5305\cos\left(\omega t\right)\cos\left(\omega t - 57.17^o\right)$$

c) Kva er den generelle samanhengen mellom tidsfunksjonen $P_s(t)$ og aktiv effekt P_s? Et verbalt svar er tilstrekkelig.

Svar:
Aktiv effekt P_s er <u>gjennomsnittseffekten</u>. I en enfasekrets vil effekten oscillere slik vi fant i tidsuttrykket $P_s(t)$. Rent matematisk kan vi sette opp sammenhengen som et integral:

$P_s = \frac{1}{T}\int_0^T P_s(t)dt$, hvor T er periodetiden til funksjonen.

Anta no at vi har mulighet til å variere *C*.

d) Kva verdi av *C* gir $i_s(t)$ i fase med $v_s(t)$?

Svar: Viss straum og spenning skal vere i fase må total impedans vere reint reell. Dvs. den induktive reaktansen må bli kansellert av den kapasitive. Dette er ekvivalent med å kreve at:

$$j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = 0$$

Vi kan løyse dette for *C*:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{\left(2\pi \cdot 50\right)^2 10 \cdot 10^{-3}} = 1.013\,mF$$

e) Finn S_s, P_s, Q_s i dette tilfellet. Kommenter verdien av Q_s

Svar: I dette tilfellet er impedansen til lasten reint reell, og den totale impedansen blir:

$$Z_{tot} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R = R$$

Effekten blir:

$$S_s = V_s I_s^* = \frac{|V_s|^2}{R} = \frac{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2}{1} = 5000 e^{j0}\ VA$$
$$P = 5000\,W$$
$$Q = 0\,VAr$$

Det er rimeleg at $Q = 0$ sidan total impedans er reint reell og berre vil forbruke aktiv effekt. Reaktiv effektbehov til induktansen blir perfekt kompensert av reaktiv effektproduksjon frå kondensatoren.

2 DIODELIKERETTER OG DC-MOTOR

a) Denne oppgåva er gitt på øving 9. Gjengir LF herifrå, sjå for øvrig LF9 for meir utdjupande informasjon.

$$v_o(t) = \begin{cases} v_s(t) &, \ v_s(t) > 0 \\ -v_s(t) &, \ v_s(t) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad v_o(t) = abs\left(v_s(t)\right)$$

$$i(t) = \begin{cases} \dfrac{v_s(t)}{R} &, \ v_s(t) > 0 \\ -\dfrac{v_s(t)}{R} &, \ v_s(t) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad i(t) = \frac{abs\left(v_s(t)\right)}{R}$$

Kan dermed finne gjenomsnittsspenningen som integralet over en periode:

$$V_o = \frac{1}{T}\int_0^T v_o(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v_s(t)dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} -v_s(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 100\sin\left(\omega t\right)dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} -100\sin\left(\omega t\right)dt$$
$$= \frac{100}{\omega T}\left(\left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_0^{T/2} - \left[-\cos\left(\omega t\right)\right]_{T/2}^{T}\right)$$
$$= \frac{100}{\omega T}\left(1 - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \cos\left(\omega T\right) - \cos\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)$$

Benytter igjen at $\omega T = 2\pi$:

$$V_o = \frac{100}{2\pi}\left(1 - \cos\left(\pi\right) + \cos\left(2\pi\right) - \cos\left(\pi\right)\right) = \frac{2}{\pi}\cdot 100\,V \approx 63.66\,V$$

Forholdet $\frac{V_o}{V_{s,rms}}$ blir nå

$$\frac{V_o}{V_{s,rms}} = \frac{\frac{2\cdot 100}{\pi}}{\frac{100}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0.90$$

Bruk sammenhengen fra a) til å løse oppgavene nedenfor der informasjon om V_o er nødvendig.

b) Anta kretsen til høyre (filter+motor). Hvilken av de følgende verdier for filteret sin knekkfrekvens er mest hensiktsmessig: 20 Hz, 200 Hz eller 2000 Hz?

Svar: Vi ser frå tidsfunksjonen til spenninga v_o at denne er periodisk med frekvens 100 Hz. Eit lavpassfilter bør då fjerne mesteparten av desse oscillasjonane, og dermed må knekkfrekvensen vere <u>lågare enn 100 Hz.</u> 20 Hz er ein rimeleg knekkfrekvens sidan mesteparten av rippelen som følge av 100 Hz- oscillasjonane då vil dempast bort. Ein knekkfrekvens på 200 Hz eller 2000 Hz ville vore lite hensiktsmessig.

Eit slikt lavpassfilter kan f.eks. realiserast med å setje ein kondensator i parallell med lasten.

c) Startar med å finne terminalspenninga til motoren V_a :

Ved å bruke at $V_o = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_{s,rms}$ og $V_a = \frac{1}{2} V_o$ (for $\omega = 0$) får vi at

$$V_a = \frac{1}{2}\frac{2\sqrt{2}}{\pi} V_{s,rms} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} V_{s,rms} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{100}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\pi} = 31.83\,V$$

Merk at RMS-verdien til v_s blir lik $\frac{100}{\sqrt{2}}$ når amplituden til cosinusfunksjonen er 100.

Vil så finne den induserte spenninga E_A. I tomgangstilfellet kallar vi denne for E_{A0} medan i lasttilfellet kallar vi den for E_{A1}. Merk at E_a er proporsjonal med turtalet når vi held feltspenninga (og dermed fluksen φ kostant).

$$E_{A0} = k\varphi n_o$$
$$E_{A1} = k\varphi n_1$$
$$\Rightarrow E_{A1} = E_{A0} \cdot \frac{n_1}{n_o}$$

I tomgang er momentet T lik null. Dermed blir ankerstrømmen $I_a = 0$ også lik null (sidan $T = k\varphi I_A$).
Sidan straumen er null blir $E_{A0} = V_a - R_A I_{A0} = V_a = 31.83\,V$. Vi kan då finne E_{A1}:

$$E_{A1} = E_{A0} \cdot \frac{n_1}{n_o} = 31.83 \cdot \frac{1400}{1500} = 29.71\,V$$

No kan vi finne straumen I_{a1} i lasttilfellet:

$$I_{A1} = \frac{V_a - E_{A1}}{R_A} = \frac{31.83 - 29.71}{0.2} = 10.60\,A$$

Då kan vi finne overført effekt til lasten:

$$P_A = E_A I_A = 29.71 \cdot 10.6 = 314.92\,W$$

3 PI-REGULATOR BASERT PÅ OPERASJONSFORSTERKER

a) Finn transferfunksjonen $H(s) = \frac{V_o}{V_i}$ til kretsen

Svar:

Bruker antagelsene om ideell operasjonsforsteker ($V_p = V_n$, samt at det går ingen strøm i inngangsterminalene). Bruker vanlig fremgangsmåte, som er å sette opp Kirchoffs strømlov i punkt *n*:

$$\frac{V_n - V_i}{R_o} + \frac{V_n - V_o}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = 0$$
$$V_n = V_p = 0$$
$$\Rightarrow V_o = -\left(R_1 + \frac{1}{sC_1}\right) \cdot \frac{V_i}{R_o}$$
$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{1}{R_o C_1} \frac{1 + sC_1 R_1}{s}$$
$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_1}{R_o} \frac{1 + sC_1 R_1}{R_1 C_1 s}$$

b) Finn K_p og T_i som funksjon av kretselementene

Svar: Sammenligner de to transferfunksjonene og får at:

$$K_p = -\frac{R_1}{R_o}$$
$$T_i = R_1 C_1$$

c) Vi påtrykker et sprang i inngangsspenningen V_i fra $0V$ til $1V$ (enhetssprang). Anta at utgangsspenningen er lik null for $t < 0$. Finn det analytiske uttrykket til $v_o(t)$ for $t \geq 0$. Skissèr forløpet, og kommenter i forhold til beskrivelsen av en PI-regulator gitt øverst i oppgaveteksten. Du trenger ikke benevninger på aksene, sett eventuelt alle komponentverdier til 1.

Svar:

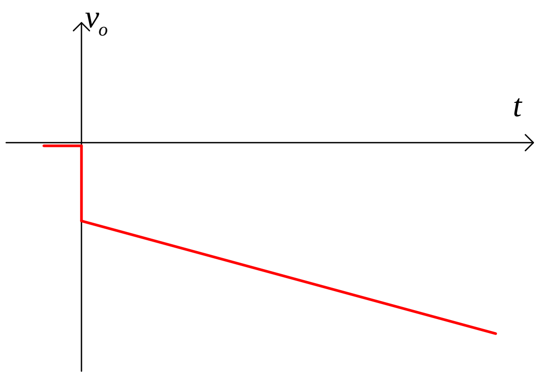
Velger å løse oppgaven med Laplacetransformasjon. Den transformerte til et enhetssprang er lik $\frac{1}{s}$, dermed blir

$$V_o(s) = -\frac{1}{s}\frac{R_1}{R_o}\frac{1 + sC_1 R_1}{R_1 C_1 s} = -\frac{1}{R_o C_1 s^2} - \frac{R_1}{R_o s}$$

Tar invers transformasjon og får:

$$v_o(t) = -\frac{1}{R_o C_1} t - \frac{R_1}{R_o} \quad , \quad t \ge 0$$

Vi lager følgende skisse:



Dette er i henhold til beskrivelsen fra opgaveteksten: Responsen er en sum av

- en konstant (proporsjonal med inngangssignalet)
- en rampe (integralet av inngangssignalet)

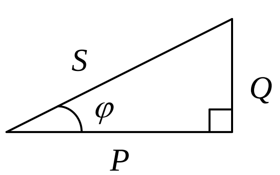
Verdien blir negativ siden inngangsspenningen er koblet på negativ terminal til op.ampen, dermed får den også en inverterende effekt (negativt fortegn).

4 EFFEKTFLYT MELLOM TO SPENNINGSKILDER

a) Hva blir effektfaktoren til spenningskilden V_s til dette driftstilfellet? Er den induktiv eller kapasitiv?

Svar: Effektfaktoren er gitt som $\cos\varphi$, hvor φ er vinkeldifferansen mellom spenning og strøm. Når spenningen V_s har vinkel lik null, så blir dette det samme som å ta cosinus til strømmen sin vinkel. Merk at fortegn ikke er viktig siden $\cos\varphi = \cos(-\varphi)$.

Der er forholdsvis enkelt å bevise at den samme vinkelen φ også dukker opp i SPQ-trekanten:



Dette er grunnen til at $\cos\varphi$ kalles effektfaktor: Den er forholdet mellom aktiv og tilsynelatende effekt:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Siden vi vet *P* og *Q*, kan vi finne effektfaktoren direkte:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right)$$

$$\cos\varphi = \cos\left[\arctan\left(\frac{Q}{P}\right)\right] = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$$

Innsatt tallverdier:

$$\cos\varphi = 0.9285$$

Effektfaktoren er *induktiv* siden straumen ligg bak (lagging) spenninga (φ er negativ).

(Det er selvsagt gyldig fremgangsmåte å først løse oppgave b), og deretter finne $\cos\varphi$)

b) Finn I_s (med vinkelen φ), og E_a (med vinkelen δ) i dette driftstilfellet

Svar:

Det enkleste er å finne strømmen basert på:

$$S_s = V_s I_s^*$$

Setter inn tallverdier:

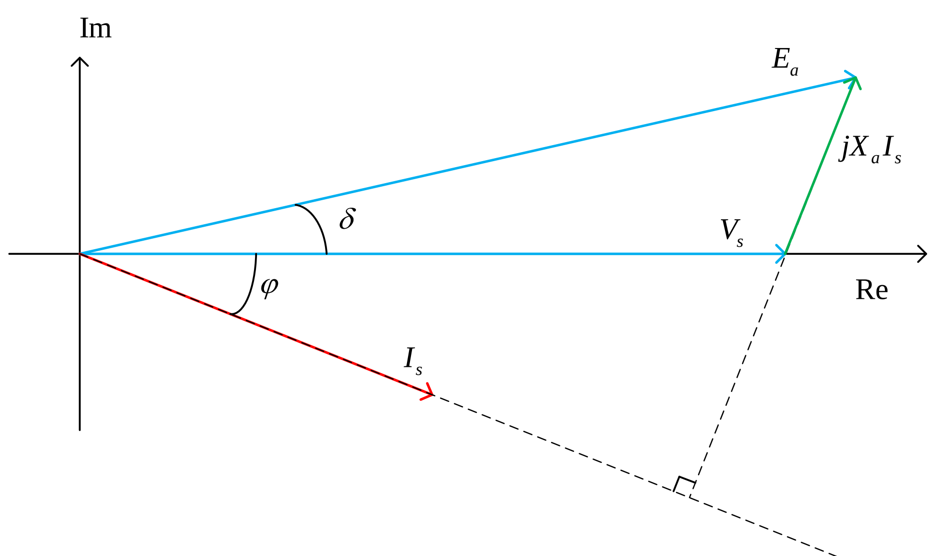
$$I_s = \left(\frac{S_s}{V_s}\right)^* = \left(\frac{P_s + jQ_s}{V_s}\right)^* = \frac{P_s - jQ_s}{V_s} = \frac{5\cdot 10^6 - j2\cdot 10^6}{10\cdot 10^3} = 500 - j200 = 538.52e^{-j21.8}\ A$$

Kan deretter finne E_a som:

$$E_a = V_s + jX_a I_s = 10\cdot 10^3 + j\cdot 5\cdot(500 - j200) = 11000 + j2500 = 11281e^{j12.8}\ V$$

c) Tegn et viserdiagram hvor V_s, E_a, I_a inngår.

Dette er vist i følgende figur:



Det er ikke nødvendig å inkludere viseren $jX_a I_s$, men den er tatt med her for å illustrere ligningen $E_a = V_s + jX_a I_s$. De stiplede linjene brukes for å illustrere at vinkelen til $jX_a I_s$ er link vinkelen til I_s pluss 90 grader (på grunn av *j*).

d) Vis at generelt så er $P_s = \dfrac{E_a V_s}{X_a}\sin\delta$ for denne kretsen. Du skal ikke sette inn tallverdier.

Svar: Dette er en vanskelig oppgave, merk at den kan løses på flere måter. Det går også an å ta utgangspunkt i viserdiagrammet for å sette opp ligningene, men her løser vi den basert på uttrykk.

Setter først opp uttrykk for den komplekse effekten:

$$S_s = V_s e^{j0} \cdot \left(I_s e^{j\varphi}\right)^* = V_s e^{j0} \cdot \left(\frac{E_a e^{j\delta} - V_s e^{j0}}{jX_a}\right)^* = \frac{V_s}{-jX_a}\left(E_a e^{-j\delta} - V_s\right)$$

$$P_s = \mathrm{Re}\{S_s\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_s E_a e^{-j\delta}}{-jX_a}\right\} + \mathrm{Re}\left\{\frac{V_s^2}{jX_a}\right\}$$

Her har vi substituert strømmen fra $I_s e^{j\varphi} = \dfrac{E_a e^{j\delta} - V_s e^{j0}}{jX_a}$, samt benyttet grunnleggende sammenhenger fra konjugering: $(a+b)^* = a^* + b^*$ og $\left(\dfrac{a}{b}\right)^* = \dfrac{a^*}{b^*}$.

Det andre leddet i uttrykket for effekt er rent imaginært, dermed står vi igjen med:

$$P_s = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_s E_a e^{-j\delta}}{-jX_a}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{V_s E_a \left(\cos(-\delta) + j\sin(-\delta)\right)}{-jX_a}\right\} = \frac{V_s E_a \sin(-\delta)}{-X_a} = \frac{V_s E_a \sin\delta}{X_a}$$

Det første leddet (med $\cos(-\delta)$) blir også rent imaginært. Vi har også brukt at $\sin(-\delta) = -\sin(\delta)$

Vi har også brukt sammenhengen $e^{jx} = \cos x + j\sin x$