Imaginære og komplekse tall

Den imaginære enheten i er definert slik at $i^2 = -1$. Med a og b reelle tall kalles:

$z = ib$ et imaginært tall,

$z = a + ib$ et komplekst tall,

$z^* = a - ib$ det tilhørende konjugerte komplekse tall.

a kalles realdelen ($a = \operatorname{Re} z$), b imaginærdelen ($b = \operatorname{Im} z$).

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$
$$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Med $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ følger:

$$z = a + ib = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), = re^{i\varphi}$$
$$z^* = a - ib = r(\cos\varphi - i\sin\varphi). = re^{-i\varphi}$$

$r = |z|$ kalles absoluttverdien, $\varphi = \arg z$ argumentet til z, og tilsvarende er: $r = |z^*|$, $-\varphi = \arg z^*$.

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Derivasjonsregler

1) La $f(x)$ og $g(x)$ være deriverbare funskjoner av variablen x. Følgende regneregler gjelder:

$$\frac{d}{dx}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) \pm \frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = g(x)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

2) Dersom $y = f(u)$ og $u = g(x)$ er deriverbare i passende områder, gjelder:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = f'(u)g'(x).$$

Spesielle derivasjonsformler

$$\frac{da}{dx} = 0, \qquad a = \text{konst} \qquad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$$
$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \qquad \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$$
$$\frac{da^x}{dx} = a^x \ln a, \qquad \frac{de^x}{dx} = e^x \qquad \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}$$

Ubestemte integraler

$$\int\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right)dx = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int e^{\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

Bestemte integraler

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b u\,dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v\,du$$

Trigonometriske funskjoner

De trigonometriske funksjonene kan defineres ved

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Relasjoner mellom trigonometriske funksjoner

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cot x}$$
$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = +\cos x$$
$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \cot(-x) = -\cot x$$

Sum og differens av funksjoner

$$\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x \pm y}{2}\cos\frac{x \mp y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x + y}{2}\cos\frac{x - y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x + y}{2}\sin\frac{x - y}{2}$$

Produkt av funksjoner

$$2\sin nx \sin mx = \cos(n - m)x - \cos(n + m)x$$
$$2\cos nx \cos mx = \cos(n - m)x + \cos(n + m)x$$
$$2\sin nx \cos mx = \sin(n - m)x + \sin(n + m)x$$

Addisjonsteoremer:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Funksjoner av det dobbelte argument:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Funksjoner av det halve argument:

$$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Geometriske summer

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{1}{1-q}, \ |q|$$

Kvadratiske ligninger

En annengradsligning med én ukjent kan skrives:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0).$$

Den har to løsninger x_1 og x_2:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Some useful formulas in signal processing

Analog signals and systems

Fourier series (for signals with period T_0)

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\frac{2\pi k}{T_0}t}$

$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-j\frac{2\pi k}{T_0}t} dt$

Fourier transform and its inverse:

$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

Electrical components

Resistor: $v(t) = Ri(t)$

Capacitor: $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$

Inductor: $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

Discrete signals and systems

Fourier series (for signals with period N)

$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$

$c_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$

Fourier transform and its inverse:

$X(\hat{\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\hat{\omega}n}$

$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\hat{\omega}) e^{j\hat{\omega}n} d\hat{\omega}$

Discrete Fourier transform (DFT) of length N

$X_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi k}{N}n}$, $k \in [0, N-1]$

$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{j\frac{2\pi k}{N}n}$, $n \in [0, N-1]$

Information and comm. theory

Information content: $I(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)}$

Channel capacity: $C = \frac{1}{2}\log_2(1 + \frac{P}{\sigma_w^2})$

Nyquist criterion

Time domain:

$$g(lT + \Delta t) = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

Frequency domain:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} G(f + \frac{m}{T}) = T$$