NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR ELEKTRONIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Signalbehandling

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Tor A. Ramstad
Tlf.: 46660465

EKSAMEN I FAG TTT4110 Informasjons- og signalteori

Norsk tekst på oddetalls-sider.
(English text on even numbered pages.)

Dato/Date: 17. august 2006
Tid/Time: 09.00 - 13.00

Hjelpemidler:
D - Ingen andre trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.
Bestemt, enkel kalkulator tillatt
(No extra printed or handwritten material allowed.
Simple calculator accepted.)

Bedømmelse:
Ved bedømmelse vektlegges hvert punkt likt.
(Equal weighting on each of the questions.)

Sensurfrist: 7. september 2006

Oppgave I

Et kausalt, tidsdiskret, lineært og skiftinvariant filter er beskrevet ved følgende differenseligning:

$$y(n) + 0.5y(n-2) = x(n) + 3x(n-1).$$

1. Tegn direkteform I- og direkteform II-strukturer for systemet. Fortell hva som er fordelen med den ene strukturen framfor den andre.
2. Beregn nå enhetspulsresponsen for et enklere system gitt ved:

$$y(n) + 0.5y(n-2) = x(n).$$

3. Bevis at dette systemet er BIBO-stabilt.
4. Ved å utnytte linearitet og skiftinvarians, utled enhetspulsresponsen for det opprinnelige systemet, og argumenter for at dette systemet også er BIBO-stabilt ut fra de foregående resultatene.

Problem I

A causal, discrete-time, linear and shift-invariant (LSI) system is described by the following difference equation:

$$y(n) + 0.5y(n-2) = x(n) + 3x(n-1).$$

1. Draw the direct form I and direct form II structures of the system. Explain the advantage of one of the systems over the other.
2. Now compute the unit sample response of a simpler system given by

$$y(n) + 0.5y(n-2) = x(n).$$

3. Prove that this causal system is BIBO stable.
4. By exploiting linearity and shift invariance, then find the unit sample response of the first system. Can you argue why this is a BIBO stable system based on the results above?

Oppgave II

Gitt følgen $x(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n = 0, 2, 4 \ldots, \infty \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$

1. Beregn den fouriertransformerte (DTFT) av $x(n)$ og diskuter verdiområdet for α for at svaret skal være gyldig.

2. Hva er den fouriertransformerte dersom vi setter alle verdier for $n \geq N$ til null? Er det nå noen restriksjoner på α?

3. En DFT kan bare tas av følger av endelig lengde. Vi danner derfor

$$x(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^n, & n = 0, 2, 4 \ldots, N-1 \\ 0, & n = 1, 3, 5 \ldots, N-2 \end{array} \right\}, \quad \text{hvor } N \text{ er et partall.}$$

   Hva blir resultatet ved å ta DFT av denne følgen?

4. For numeriske beregninger bruker vi oftest DFT som transform (gjerne implementert med FFT-algoritmer). Forklar ut fra det foregående i denne oppgaven hvilke følger dette får for frekvensplanrepresentasjonen av den opprinnelige, uendelige følgen.

Problem II

Given the sequence $x(n) = \begin{cases} \alpha^n, & n = 0, 2, 4 \ldots, \infty \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

1. Calculate the discrete time Fourier transform (DTFT) of $x(n)$ and discuss the range of α for which the obtained expression is valid.

2. Find the Fourier transform of a related sequence where we set all signal values for $n \geq N$ equal to zero. Is there now any restriction on α?

3. A discrete Fourier transform (DFT) can only be performed on final length sequences. We consider the following:

   $$x(n) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha^n, & n = 0, 2, 4 \ldots, N-1 \\ 0, & n = 1, 3, 5 \ldots, N-2 \end{array} \right\}, \quad \text{where } N \text{ is an even number.}$$

   What is the result of performing a DFT on this sequence?

4. For numerical calculations we most often use DFTs to find the Fourier spectrum of any signal (implemented by FFT algorithms). Based on the above example, explain the implications on the frequency domain representation by replacing the DTFT of the infinite sequence by the DFT of the finite sequence.

Oppgave III

1. Hva er kvantiseringsstøyvariansen, σ_Q^2, fra en uniform kvantiserer med quantiseringsintervall Δ for $\Delta << \sigma_X$, hvor σ_X er standardavviket til signalet og middelverdi er null? Forklar tilnærmelsen(e) som må gjøres for å oppnå dette resultatet.

Under den samme antakelsen er det også en god tilnærmelse at støyen er hvit og ukorrelert med inngangssignalet, noe som impliserer at det rekonstruerte signalet kan uttrykkes som $y(n) = x(n) + q(n)$, der $x(n)$ er opprinnelig signal og $q(n)$ er støykomponenten fra kvantiseringen.

2. Med gitt Δ, finn effektspektraltettheten $S_{YY}(\omega)$ for signalet $y(n)$, når effektspektraltettheten til $x(n)$ er gitt ved $S_{XX}(\omega)$.

Anta at $x(n)$ er en AR(1)-prosess med effektspektraltetthet

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\omega}\ \sigma_X^2.$$

Etter rekonstruksjonen blir $y(n)$ filtrert gjennom et FIR-filter med følgende differenseligning:

$$w(n) = y(n) + by(n-1).$$

3. Finn effektspektraltettheten $S_{WW}(\omega)$ til signalet $w(n)$ uttrykt ved Δ, ρ, b og σ_X^2, og utled effektspektraltettheten som stammer fra kvantiseringsstøyen når filterparameteren er valgt slik at signalkomponenten blir hvit.

Entropien til et kvantisert signal kan tilnærmes med

$$H(X) = h(X) - \log_2(\Delta).$$

Anta at vårt signal signal, $x(n)$, er gaussisk. Dette medfører at den differensielle entropien er gitt ved

$$h(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma_X^2).$$

4. Finn lavest mulig bitrate for det kvantiserte signalet når $\Delta = \sigma_X/4$.

Problem III

1. What is the quantizer noise variance, σ_Q^2 of a uniform quantizer expressed in terms of the quantizer intervals Δ for $\Delta << \sigma_X$, where σ_X is the standard deviation of the signal and the signal has zero mean? Explain the approximation(s) made to obtain this result.

Under the above assumptions one can also assume that the noise is white and uncorrelated with the signal, which implies that the reconstructed signal is given by $y(n) = x(n) + q(n)$, where $x(n)$ is the original signal and $q(n)$ is the noise component resulting from quantization.

2. With a given Δ, find the power spectral density $S_{YY}(\omega)$ of the signal $y(n)$ when the power spectral density of $x(n)$ is given by $S_{XX}(\omega)$.

Assume that $x(n)$ is an AR(1)-process with power spectral density

$$S_{XX}(\omega) = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\omega}\ \sigma_X^2.$$

After reconstruction $y(n)$ is filtered by an FIR filter with the following difference equation:

$$w(n) = y(n) + by(n-1).$$

3. Find the power spectral density $S_{WW}(\omega)$ of the signal $w(n)$ expressed by Δ, ρ, b, and σ_X^2, and derive the noise power spectral density originating from the quantization noise when the filter is optimized to whiten the signal component.

The entropy of a quantized signal can be approximated by

$$H(X) = h(X) - \log_2(\Delta).$$

Assume that our signal, $x(n)$, is Gaussian, for which case the differential entropy is given by

$$h(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi e\sigma_X^2).$$

4. Find the lowest possible bit-rate with which the quantized signal can be represented when $\Delta = \sigma_X/4$.