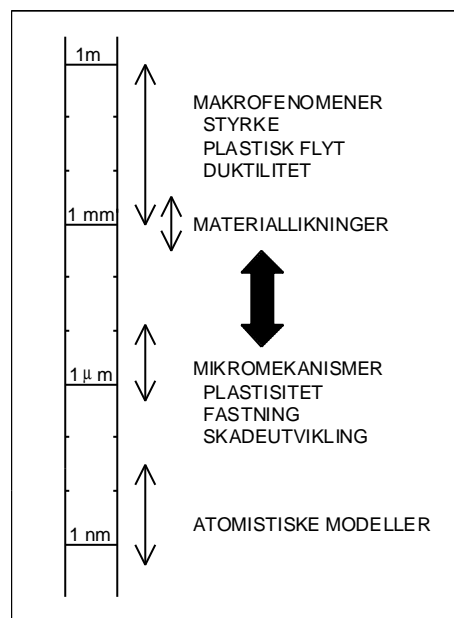


Kapittel 3

3. Mikro - Makro

3.1 Innledning

Dette kapitlet behandler de strukturefølsomme mekaniske og termomekaniske egenskaper hos metaller og polymerer. Det er egenskaper som flytmotstand og formbarhet ved plastisk forming, og det er egenskaper som styrke, siging, fastning og bruddoppførsel hos lastbærende konstruksjoner. Her vil materialenes mikrostruktur — fra nanometernivå til mikrometernivå — påvirke og bli påvirket av materialets makro-oppførsel med hensyn på styrke, plastisk flyt og duktilitet (se Figur 3-1). For å kunne benytte kunnskaper om samspillet mellom mikrofenomener (plastiske deformasjonsmekanismer, fastning og skadeutvikling) og makrofenomener (plastisk flyt, styrke og duktilitet) ved *kvantitative* analyser og beregninger, må *materiallikninger* formuleres. Materiallikningene (eng: "Constitutive Equations") beskriver sammenhengen mellom spenninger, ikke-elastiske tøyningendringer, temperatur og eventuell skadeutvikling av et emne som formes eller en lastbærende konstruksjon der havaririsiko skal vurderes.



Figur 3-1 Samspill mellom mikro og makro.

Mikro – makro sammenhengen kan også beskrives som vist på figur Figur 3-2. Utgangspunktet her er at de fleste kommersielle metaller har en krystallstruktur innen én av typene:

- kubisk romsentrert (bcc — body-centered cubic), (α -jern, krom, wolfram, β -titan (>883°C)) kubisk flatesentrert (fcc — face-centered cubic), (Aluminium, kopper, nikkel, γ -jern (910-1390°C))
- heksagonal tettpakket (hcp — hexagonal close packed), (Magnesium, sink, α -titan)

Figur 3-2 viser disse 3 strukturene for henholdsvis α -jern (bcc), aluminium (fcc) og magnesium (hcp). Krystallstrukturen ses her i sammenheng med et typisk produkt, fremstillingsmetode og kornstruktur for en spesiell legering tilknyttet disse metallene.

Mikrostrukturen til metallene spenner altså over et størrelsesområde fra mindre enn én nanometer (enhetskrystall) til over 10 mikrometer (et krystallkorn). Det betyr over 5 dekader i størrelsesorden dvs. tilsvarende fra 1 mm til opp mot 1 km. Et viktig siktemål for dette kurset er at en får en klar forståelse for på hvilket nivå en spesiell mekanisme opererer, og hvordan samspillet mellom mekanismer på forskjellige størrelsesordennivåer foregår.

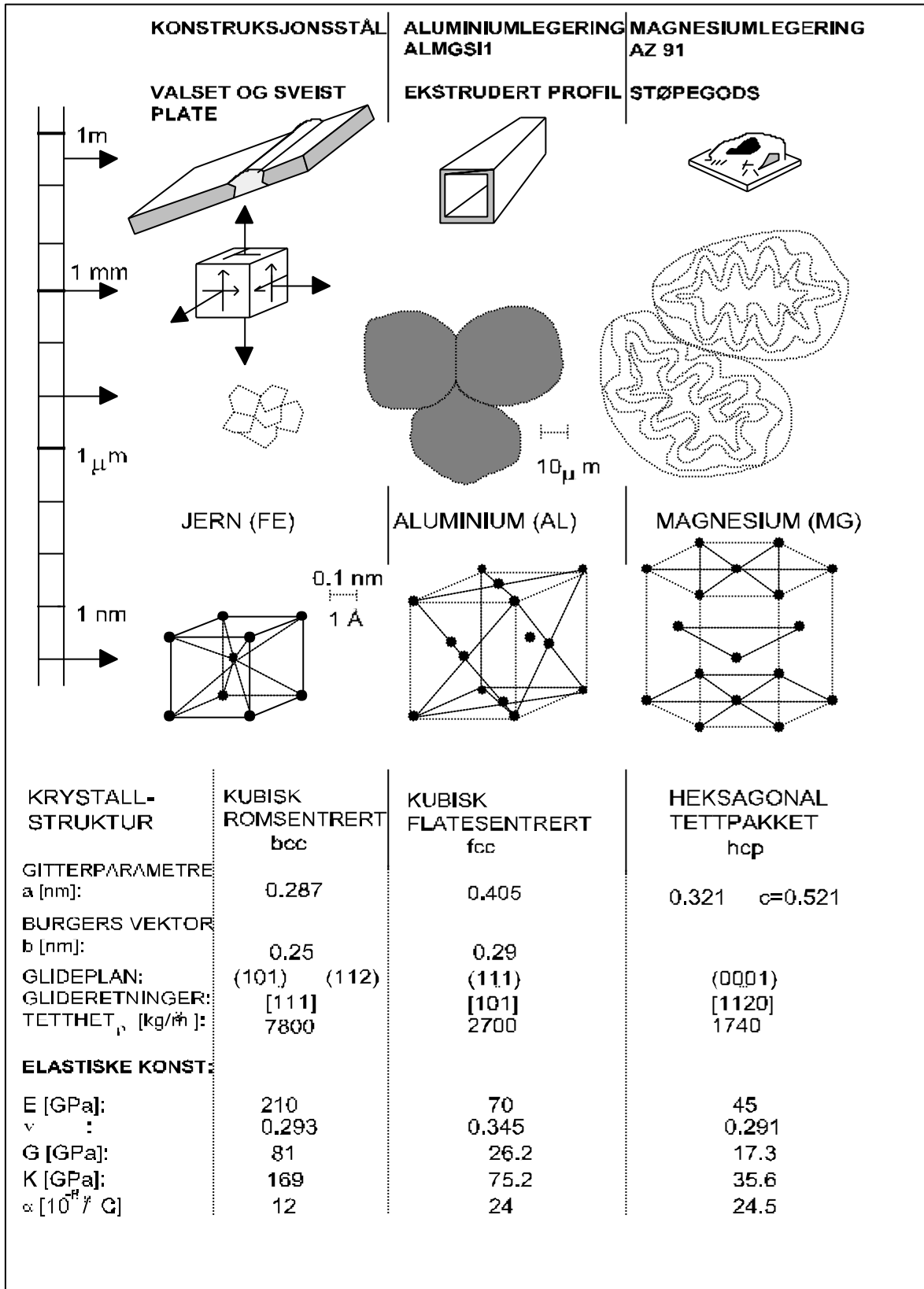
På Figur 3-2 er det også angitt en del karakteristiske egenskaper til de forskjellige metallene. Dette er egenskaper som har liten eller ingen strukturfølsomhet. Elastiske konstanter er E -modul, Poissons tall ν , skjærmodul G , kompresjonsmodul K og temperaturutvidelseskoeffisient α .

I kapittel 3.2 - 3.3 er det lagt vekt på å utnytte de begreper som ble innført i Materialteknikk I (Ashby & Jones) til å vise sammenheng mellom atomistiske fenomener og materialenes observerbare oppførsel: Mikromekanismer beskrives ut fra atomistiske modeller, materialligninger ut fra samspill av mikromekanismer, og materialoppførsel ut fra plastisitetsteori (kontinuumsmekanikk) der materialligningene beskriver sammenheng mellom spenninger, tøyninger, tøyningshastighet og temperatur.

Kapittel 3.4 beskriver først hvordan man angir plan og retninger i krystallstrukturen og hvordan glidning av atomer foregår på bestemte plan og langs bestemte retninger. Dette leder frem til begreper som krystallplastisitet, flyteflater, tekstur og anisotropi.

Selve deformasjons- eller glidningsmekanismen beskrives av dislokasjonsteorien, og i kapittel 3.5 vises sammenhengen mellom dislokasjonsbevegelse på mikronivå og den resulterende plastiske deformasjonen.

Dislokasjonsmekanismene gir grunnlaget for materialenes mekaniske egenskaper som observeres ved materialprøving på makronivå, og i kapittel 3.5 presenteres viktige grunnligninger som forbinder mikromekanisme med makroegenskap.



Figur 3-2 Typiske legeringer, egenskaper, struktur og produkter.

For de som ønsker å gå dypere inn i problemstillingene, henvises til Dieter [2] og McCrum & al [3] i referanselisten på slutten av kapittelet.

I den moderne utviklingen av fagområdet er begrepet mesoplastisitet innført av blant andre Yang & Lee [6]. Det omfatter de emnene som binder sammen faststoffmekanikk, metallurgi og materialfysikk. Dette kapittelet er bygget opp i tråd med denne utviklingen av faget.

3.2 Plastisk deformasjon.

For å kunne analysere praktiske problemer tilknyttet materialenes mekaniske egenskaper og plastiske formingssegenskaper, er det nødvendig å behandle flerakset spenningstilstand og ikke-homogene flyttilstander. De generelle likninger og spesielle løsninger for plan spenning og plan tøyning vil bli behandlet i dette avsnittet (se også referanse [1]).

Dette avsnittet bygger på grunnligningene i faststoffmekanikken slik de er gitt av Irgens [4]. Vi har forsøkt å benytte de symbolene og betegnelse som er brukt der. Videre er kapittelet en introduksjon til de emner som gis i fordypningsfag og dr.ing.fag innen videregående materialteknologi og numerisk simulering av materialoppførsel.

Grunnligningene i faststoffmekanikken beskriver følgende 3 forhold:

- likevekt for spenninger
- sammenheng mellom forskyvninger og tøyninger
- sammenheng mellom spenninger og tøyninger

For å løse et bestemt problem, må vi i tillegg definere hvilke randbetingelser som skal gjelde.

Helt sentralt står begrepet spenning. Mange ingeniører vil i sin arbeidssituasjon bli ansvarlig for å gjennomføre strukturanalyser på datamaskin og å vurdere resultatene. Uten å ha en forståelse av spenningsbegrepet, vil en slik situasjon bli ganske håpløs; men desto mer givende med en god forståelse.

3.2.1 Spenninger

Normal- og skjærspenning.

Vi tenker oss en liten flate dA rundt punktet P med normalretning \mathbf{n} i rommet. På denne flaten virker det en kraft dF med en retning \mathbf{e} slik som Figur 3-3 viser (\mathbf{n} og \mathbf{e} er enhetsvektorer).

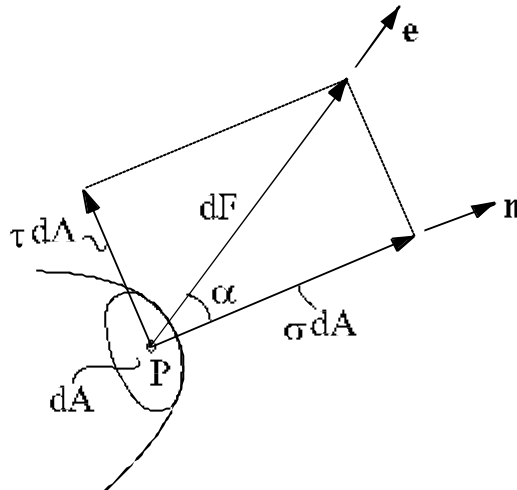
Vi dekomponerer kraften dF i en del som er rettet langs \mathbf{n} og en del som ligger i flaten. Normalspenningen \mathbf{s} står normalt på flaten og er gitt av

$$\mathbf{s} = \frac{dF\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}}{dA} = \frac{dF}{dA} \cos \mathbf{a}$$

Legg merke til at σ er positiv som strekk. Skjærspenningen τ ligger i flaten og finnes ved bruk av Pytagoras; og uten å ta stilling til fortegn har vi at

$$t = \left| \frac{dF}{dA} \sin \alpha \right|$$

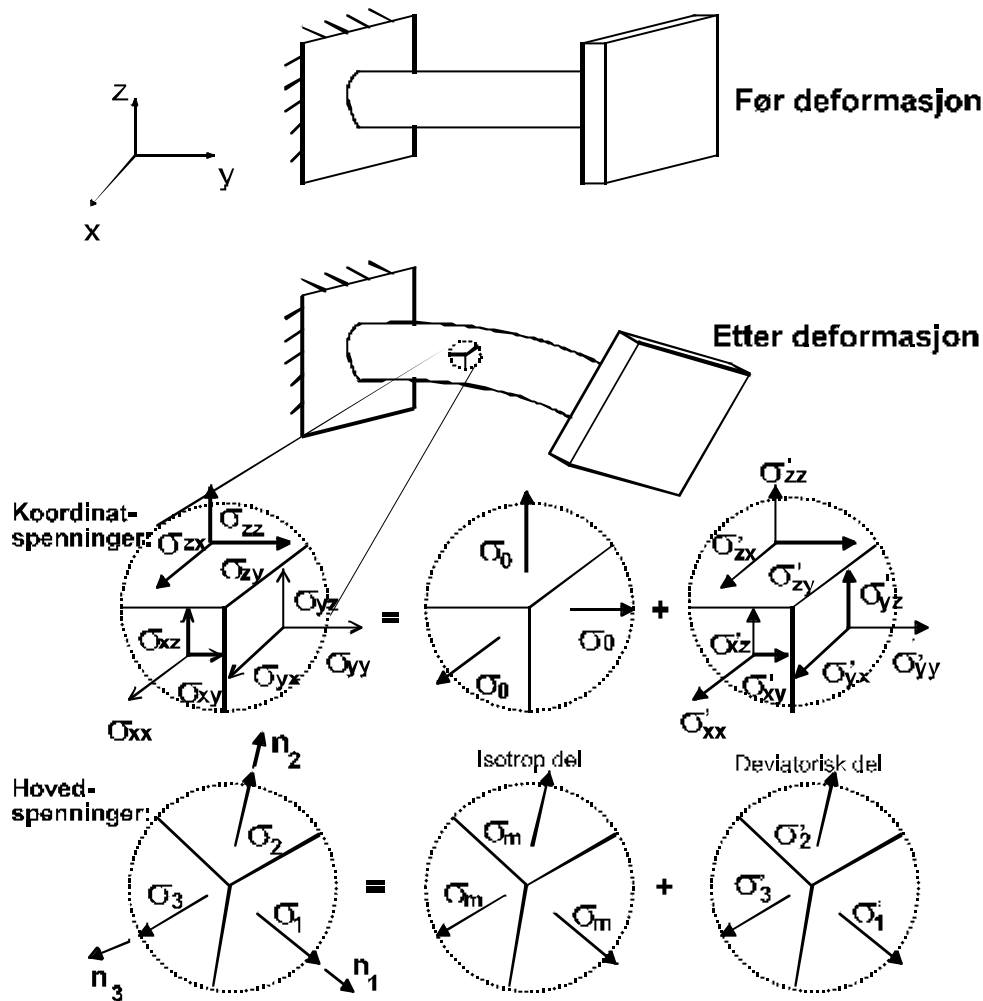
Spenning uttrykker kraft per arealenheter og måles i N/mm^2 (= MPa). Det er viktig å ha klart at spenninger generelt ikke kan behandles som vektorer selv om vi bruker piler for å angi spenningene.



Figur 3-3 Dekomponering av en kraft på en flate.

Koordinatspenninger

Figur 3-4 viser en konstruksjonsdel før og etter deformasjon. Etter deformasjonen tenker vi oss at vi kan se på et bestemt punkt i konstruksjonen. I punktet er de 3 koordinatplanene (xy , yz , zx) lagt inn og spenningene i hvert plan er satt på. På hvert plan virker det 3 spenninger, en normalspenning og to skjærspenninger. Vi betrakter den positive siden av hvert plan, det vil si den siden som har normalvektoren i positiv akseretning.



Figur 3-4 Beskrivelse av spenningsstilstanden i et punkt.

Fortegnsregelen for koordinat-spenninger er slik at spenningene peker i positive akseretninger. Rekkefølgen for indeksene er slik at 1.index angir planets normalretning og 2.index angir spenningenes retning. For eksempel betyr s_{yx} en skjærspenning i planet normalt y -aksen og med spenningsretning langs positiv x -akse. Vi vet fra fasthetslæren at skjærspenningene er parvis like store, det vil si at $s_{xy} = s_{yx}$, $s_{yz} = s_{zy}$ og $s_{zx} = s_{xz}$. Det betyr at spenningsstilstanden (3-dimensjonal) er fullstendig bestemt av 6 spenningskomponenter.

En systematisk og oversiktlig måte å angi spenningsstilstanden i et punkt på, er å sette opp spenningsmatrisen i punktet. Spenningsmatrisen defineres slik:

$$s = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

Istedenfor å angi akseretningene med bokstavene x , y og z brukes ofte tallene 1, 2 og 3 slik at 1-retningen tilsvarer x -retningen osv. Vi har da at $s^T = s$ eller $s_{ij} = s_{ji}$ for alle $i, j = 1, 2, 3$. Matrisen er symmetrisk, dvs. den transponerte (T) av matrisen er lik matrisen.

Hovedspenninger og hovedspenningsretninger

La oss gå tilbake til Figur 3-4 og tenke oss at vi roterer på koordinatsystemet xyz . Da vil de 3 planene som vi la inn i vårt spenningspunkt også rotere og spenningene vil endre retning og verdi. Vi vet fra fasthetslæren at det er mulig å orientere koordinatsystemet slik at skjærspenningene blir null slik at vi har kun normal-spenninger. Disse normalspenningene kalles hovedspenninger og de tilhørende retninger for hovedspenningsretninger. Spenningsmatrisen uttrykt i hovedspennings-retningene blir da

$$\mathbf{s}_h = [\mathbf{s}_{ij}]_h = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_3 \end{bmatrix}$$

Det kan vises at hovedspenningene representerer egenverdiene til koordinatspenningsmatrisen og kan finnes fra determinantuttrykket:

$$\det(\mathbf{s} - \sigma \mathbf{I}) = 0$$

Vi får en 3.gradsligning i σ med 3 reelle røtter (fordi matrisen \mathbf{s} er symmetrisk) som representerer hovedspenningene. Hovedspenninger med retninger er også vist i Figur 3-4.

Det er viktig å ha klart for seg at størrelsen på hovedspenningene er uavhengig av hvordan vi orienterer vårt koordinatsystem xyz . Vi sier at hovedspenningene er invariante med hensyn på koordinatsystemets retning. Den absolutte største skjærspenningen er gitt av

$$\mathbf{t}_{max} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_{max} - \mathbf{s}_{min})$$

hvor \mathbf{s}_{max} er største hovedspenning (med fortegn) og \mathbf{s}_{min} er minste hovedspenning. Ved hjelp av Mohr's sirkel er det lett å vise at \mathbf{t}_{max} står 45° på \mathbf{s}_{max} og \mathbf{s}_{min} .

Isotrop og deviatorisk spenningsdel

Det er ofte svært hensiktsmessig å splitte opp spenningsmatrisen i to deler: en isotrop eller hydrostatisk del og en deviatorisk del:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^o + \mathbf{S}'$$

Den isotrope delen bestemmes fra den midlere normalspenningen.

Isotrop del:

$$\mathbf{s}^o = \mathbf{s}_o \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{hvor: } \sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Deviatorisk del:

$$\mathbf{s}' = [\mathbf{s}'_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{11} - \mathbf{s}_o & \mathbf{s}_{12} & \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{21} & \mathbf{s}_{22} - \mathbf{s}_o & \mathbf{s}_{23} \\ \mathbf{s}_{31} & \mathbf{s}_{32} & \mathbf{s}_{33} - \mathbf{s}_o \end{bmatrix}$$

Legg merke til at summen av de deviatoriske normalspenningene blir lik null:

$$\mathbf{s}'_{11} + \mathbf{s}'_{22} + \mathbf{s}'_{33} = 0$$

Det kan vises at midlere normalspenning \mathbf{s}_o er uavhengig av koordinatsystemets orientering. Dersom vi beskriver spenningstilstanden med hovedspenningene, kan vi sette (indeks h for hovedspenning):

$$\mathbf{s}_h = \mathbf{s}^o + \mathbf{s}'_h$$

hvor

$$\mathbf{s}'_h = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_o & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_o & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{s}_3 - \mathbf{s}_o \end{bmatrix}$$

Isotrop og deviatorisk del av spenningene er også vist i Figur 3-4.

Einsteins summasjonsregel

Vi vet at når vi skriver \mathbf{s}_{ij} så betyr det alle 9 spenningskomponentene, hvor i og j varierer uavhengig fra 1 til 3. Når en indeks repeteres *en* og bare *en* gang i et ledd så betyr det at summasjon foretas over tallområdet for indeksen. Det medfører at

$$\mathbf{s}_{ii} = \mathbf{s}_{jj} = \mathbf{s}_{11} + \mathbf{s}_{22} + \mathbf{s}_{33}$$

Vi repeterer også Kronecker's delta symbol

$$\mathbf{d}_{ij} = 1 \quad \text{for } i = j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{d}_{ij} = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

Legg merke til at:

$$\mathbf{d}_{ii} = \mathbf{d}_{11} + \mathbf{d}_{22} + \mathbf{d}_{33} = 3$$

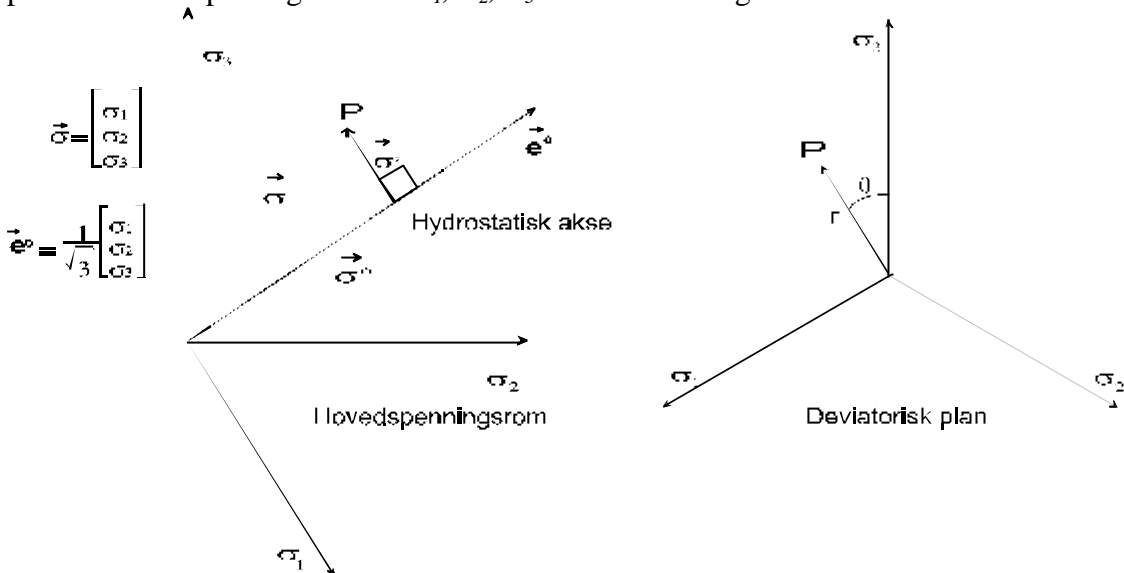
Oppsplitting i isotrop og deviatorisk del kan nå skrives

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{1}{3} \mathbf{s}_{kk} \mathbf{d}_{ij} + \mathbf{s}'_{ij}$$

Legg også merke til at et uttrykk som $\sigma_{ij}\sigma_{ij}$ representerer en sum over 9 ledd.

Spenningene uttrykt i det deviatoriske planet

Hvis vi ser bort fra retningsinformasjonen, har vi sett at vi kan uttrykke spenningsstilstanden i et punkt ved hjelp av hovedspenningene. Spenningsstilstanden kan derfor avmerkes som et punkt P i hovedspenningsrommet $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ slik som vist i Figur 3-5.



Figur 3-5 Spenningspunkt i hovedspenningsrommet og i det deviatoriske planet.

For å angi at spenningene framstilles som vektorer i hovedspenningsrommet, brukes pil over spenningssymbolet. Den isotrope del av spenningen er komponenten av spenningen langs hydrostatisk akse.

$$\bar{\mathbf{s}}^o = (\bar{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{e}}^o) \bar{\mathbf{e}}^o = \frac{1}{3}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3) \bar{\mathbf{e}}^o = \sqrt{3} \cdot \mathbf{s}_o \bar{\mathbf{e}}^o$$

Den deviatoriske komponenten blir dermed

$$\mathbf{s}' = \bar{\mathbf{s}} - \bar{\mathbf{s}}^o = \begin{matrix} \hat{e} \sigma_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma_3 \hat{u} \\ \hat{e} \sigma_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma_3 \hat{u} \\ \hat{e} \sigma_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma_3 \hat{u} \end{matrix} - \sigma_0 \begin{matrix} \hat{e} \hat{1} \hat{u} \\ \hat{e} \hat{1} \hat{u} \\ \hat{e} \hat{1} \hat{u} \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{e} \sigma'_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_3 \hat{u} \\ \hat{e} \sigma'_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_3 \hat{u} \\ \hat{e} \sigma'_1 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_2 \hat{u} & \hat{e} \sigma'_3 \hat{u} \end{matrix}$$

Figur 3-5 viser også spenningspunktet P når vi ser rett imot den hydrostatiske aksene. Vi ser da det planet som den deviatoriske spenningen ligger i. I det deviatoriske planet vil spenningspunktet være entydig bestemt ved sine polare koordinater r og q , hvor vinkelen q kan regnes ut fra projeksjon av \mathbf{s}_3 -aksen.

$$r = |\bar{\mathbf{s}}'| = \left[(\sigma'_1)^2 + (\sigma'_2)^2 + (\sigma'_3)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Vi kan konkludere med at det er likeverdig om vi beskriver spenningstilstanden med (s_1, s_2, s_3) eller med (σ_o, r, q) .

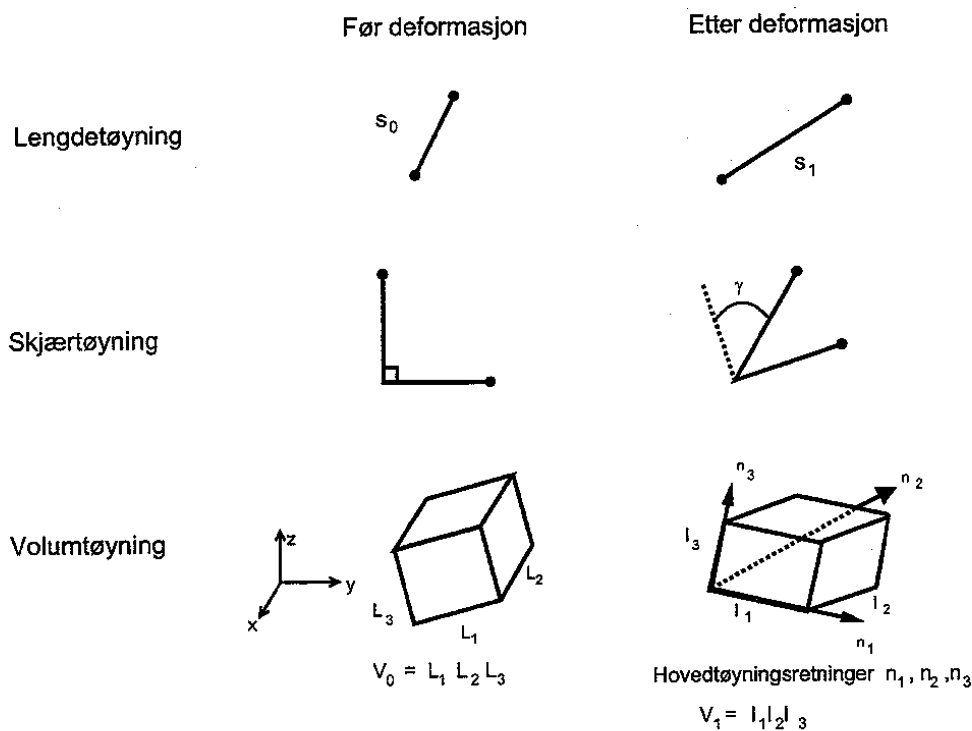
Koordinaten r kan også uttrykkes ved hjelp av de deviatoriske koordinat-spenningene. Vi har da

$$r = \left(\sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{summasjon over } i \text{ og } j) \quad (3.1)$$

3.2.2 Tøyninger og tøyningsrater

Tøyninger

Vi skiller gjerne mellom 3 typer av tøyning: lengdetøyning, skjærtøyning og volumtøyning, se Figur 3-6.



Figur 3-6 Lengde-, skjær- og volumtøyning.

Lengdetøyning kan defineres på flere måter. Ved nominell eller ingeniørtøyning refereres tilbake til utgangslengden, mens ved sann eller logaritmisk tøyning refereres det til nåtilstanden.

Nominell lengdetøyning er definert ved:

$$e = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{s_0} = \frac{s_1 - s_0}{s_0} = \frac{s_1}{s_0} - 1 \quad (3.2)$$

og sann lengdetøyning er definert ved:

$$\mathbf{e} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{s} = \ln \frac{s_1}{s_0} \quad (3.3)$$

Følgende relasjon eksisterer dermed mellom nominell og sann lengdetøyning:

$$\mathbf{e} = \ln(e + 1) = e - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^3 - \dots$$

Dersom $e = 0.1$ så blir $\mathbf{e} = 0.095$, det vil si ca. 5 % avvik. Dersom $e = 0.01$, blir avviket ca. 0.5 % mellom nominell og sann lengdetøyning.

I dataprogram for plastiske beregninger må bruker gi materialkurven, det vil si spenningen som funksjon av tøyningen som resultat av en enakset strekkprøve. Det er viktig å være klar over om det er nominell eller sann lengdetøyning som programmet spør etter .

Skjærtøyning defineres som endring av vinkelen mellom to infinitesimale linjestykker som før deformasjonen stod vinkelrett på hverandre.

Volumtøyning kan som lengdetøyning defineres ved sin nominelle eller sanne verdi. Det kan vises at det i ethvert punkt i et deformert legeme eksisterer 3 ortogonale retninger som også har vært ortogonale før deformasjonen. De 3 ortogonale retningene etter deformasjonen har dermed ikke skjærdeformasjon, og lengdetøyningene i de 3 retningene kalles derfor hovedtøyninger og de tilhørende retninger kalles hovedtøyningsretninger, se Figur 3-6.

Nominell volumtøyning er definert ved:

$$e_v = \frac{V_1 - V_0}{V_0} \quad (3.4)$$

og sann volumtøyning er definert ved:

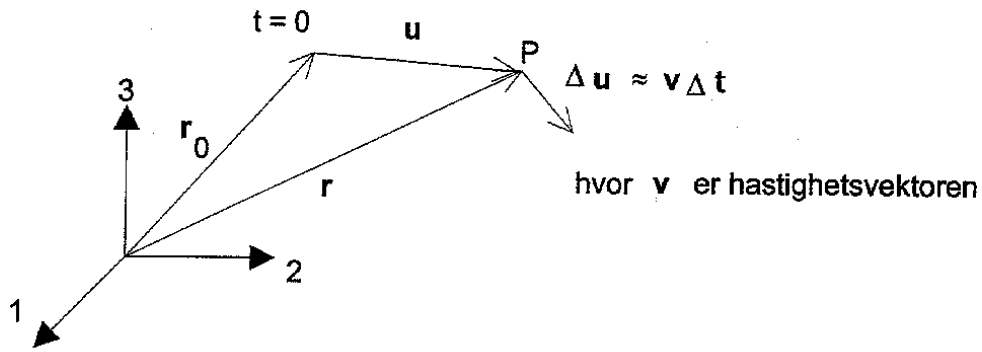
$$\mathbf{e}_v = \ln \frac{V_1}{V_0} = \ln \frac{l_1}{L_1} + \ln \frac{l_2}{L_2} + \ln \frac{l_3}{L_3} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad (3.5)$$

hvor \mathbf{e}_i er hovedtøyningene ($i=1,2,3$).

Tøyningshastighet eller tøyningsrate

Figur 3-7 illustrerer begrepet tøyningsrate. Vi tenker oss et legeme som deformeres ifra tiden $t = 0$. Ved tiden t starter vi å måle forskyvningene rundt et punkt P i konstruksjonen og når tiden er $t + \Delta t$ avsluttes målingene. Vi måler da små forskyvninger Δu_i som vi refererer til

nåtilstanden eller legemets konfigurasjon ved tiden t , $\Delta u_i = \Delta u_i(x_j)$, hvor x_j er koordinatene til punktet P ved tiden t .

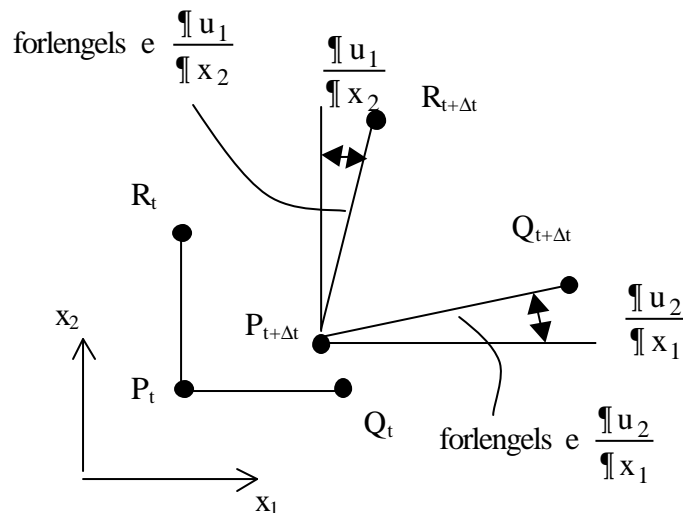


Figur 3-7 Måling av forskyvningene til et punkt i konstruksjonen.

I tidsrommet Dt er våre målte forskyvninger små, og vi kan derfor bruke sammenhengen mellom små forskyvninger og små tøyninger som uttrykkes ved:

$$(\Delta \mathbf{e})_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \Delta u_j}{\partial x_i} \right)$$

Denne formelen trenger litt nærmere presentasjon. Vi ser på forholdene i xy -planet og betrakter 3 punkter ved tiden t : P_t , Q_t og R_t . Ved tiden $t + \Delta t$ har punktene forskjøvet seg til $P_{t+\Delta t}$, $Q_{t+\Delta t}$ og $R_{t+\Delta t}$.



Lengdetøyning (endring av lengde delt på opprinnelig lengde) i x -retning (eller x_1 -

retning) blir $\epsilon_{11} = \frac{\delta u_1}{\delta x_1}$ og lengdetøyning i y-retning (eller x_2 -retning) blir $\epsilon_{22} = \frac{\delta u_2}{\delta x_2}$

Skjærtøyningen (endring av vinkel) blir $\gamma_{12} = 2\epsilon_{12} = \frac{\delta u_1}{\delta x_2} + \frac{\delta u_2}{\delta x_1}$

Vi ser da at skrivemåten for sammenhengen mellom små tøyninger og små forskyvninger er gyldig generelt.

For å få frem tøyningshastighetene, divideres på Dt og med $Dt \rightarrow 0$ fåes uttrykket for tøyningsratene:

$$D_{ij} = \lim \frac{(\Delta \epsilon)_{ij}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (3.6)$$

Her er hastigheten i retning nummer i gitt ved $v_i = \frac{\delta u_i}{\delta t}$ (tidsderivate av forskyvningen).

Aksialtøyningssraten i 1-retning er $D_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1}$ og skjærtøyningssraten i 1-2 planet er

$$2D_{12} = \frac{\delta v_1}{\delta x_2} + \frac{\delta v_2}{\delta x_1}$$

Tøyningshastighetene settes systematisk opp i en matrise (slik som spenningene). Denne kalles tøyningssratematriksen eller deformasjonsratematriksen:

$$\mathbf{D} = [D_{ij}] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}$$

Matrisen er symmetrisk:

$$D_{ji} = D_{ij} \quad (\mathbf{D}^T = \mathbf{D})$$

Tøyningssratematriksen kan spaltes opp i en isotrop del som angir volumendring og en deviatorisk del som angir formendring (dette er viktig):

$$D_{ij} = \frac{1}{3} D_{kk} \mathbf{d}_{ij} + D'_{ij}$$

hvor

$$D_{kk} = \frac{\delta v_1}{\delta x_1} + \frac{\delta v_2}{\delta x_2} + \frac{\delta v_3}{\delta x_3}$$

er volumendring per tidsenhet. Legg merke til at $D'_{kk} \equiv 0$. En alternativ skrivemåte for tøyningssratene er å bruke $\dot{\mathbf{e}}$ med en prikk over (derivasjon med hensyn på tiden). I det etterfølgende brukes $\dot{\mathbf{e}}$ slik at

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij} = D_{ij}$$

En infinitesimal tøyingsstørrelse kan dermed skrives

$$d\mathbf{e}_{ij} = \dot{\mathbf{e}}_{ij} dt$$

Observasjoner ved plastisk deformasjon

Eksperimenter med plastisk deformasjon av metalliske materialer viser to viktige forhold:

- middelspenningen \mathbf{s}_o har ingen betydning for plastisk oppførsel \Rightarrow kun spenningskoordinatene r og \mathbf{q} vil ha betydning
- plastisk deformasjon foregår uten volumendring $\Rightarrow D_{ii}=0$

Fordi materialdata for plastisk oppførsel til isotrope materialer tas fra den endimensjonale strekkprøven, er det viktig å beregne r for en enakset prøvestav med spenning σ ($\sigma > 0$), se ligning (3.1):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\mathbf{s}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\mathbf{s}}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

og dermed blir radien til spenningspunktet i det deviatoriske plan

$$r = \frac{\mathbf{s}}{3} (4 + 1 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \mathbf{s} \quad (3.7)$$

3.2.3 Flytekriterier for isotrope materialer

Med flytekriterier mener vi at materialet får plastisk flytning når spenningene når opp til et bestemt nivå. Spenningstilstanden kan da måles ved koordinatspenningene, hovedspenningene eller i $\mathbf{s}_o - r - \mathbf{q}$ systemet. Det bestemte nivået settes lik flytespenningen \mathbf{s}_F for den enaksete strekkprøven. Man må skille mellom flytegrensen $R_{p0.2}$, som definerer overgangen fra elastisk til plastisk oppførsel, og flytespenningen, \mathbf{s}_F , som er den sanne spenningen etter at flyting har inntruffet.

Spenningsside:

$h(\mathbf{s}_{ij})$

$h(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3)$

Materialsida:

\mathbf{s}_F

$$h(\mathbf{s}_0, r, \mathbf{q})$$

Fordi den isotrope spenningen σ_0 ikke har betydning, kan vi sette som generelt flytekriterium:

$$f = h(r, \mathbf{q}) - \mathbf{s}_F = 0$$

Det enkleste kriteriet får vi ved å si at radien r er konstant, dvs. uavhengig av vinkelen \mathbf{q} . Vi har da; se ligning (3.1) og (3.7):

$$r = \sqrt{\mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{ij}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbf{s}_F$$

Mises kriteriet for flyting sier nettopp dette:

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{ij}} - \mathbf{s}_F = 0 \quad (3.8)$$

eller

$$\mathbf{s}_e - \mathbf{s}_F = 0$$

hvor

$$\mathbf{s}_e = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}'_{ij} \mathbf{s}'_{ij}}$$

Størrelsen \mathbf{s}_e kalles for effektiv spenning eller jamnføringsspenning. Betingelsen for om materialet er i elastisk eller plastisk tilstand, bestemmes av:

$$\begin{aligned} f = \mathbf{s}_e - \mathbf{s}_F < 0 & \Rightarrow \text{elastisk oppførsel} \\ f = \mathbf{s}_e - \mathbf{s}_F = 0 & \Rightarrow \text{plastisk oppførsel} \\ f = \mathbf{s}_e - \mathbf{s}_F > 0 & \Rightarrow \text{ikke tillatt} \end{aligned}$$

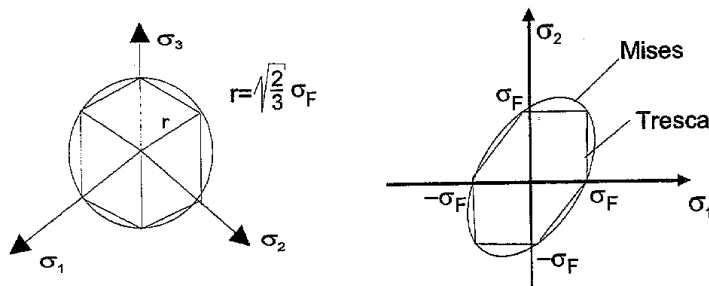
Tresca-kriteriet for flyting sier at materialet starter å flyte når maksimal skjærspenning når flyteskjærspenningen:

$$\mathbf{t}_{maks} - \mathbf{t}_F = 0$$

eller

$$(\mathbf{s}_{maks} - \mathbf{s}_{min}) - \mathbf{s}_F = 0 \quad (3.9)$$

Her er brukt at $\mathbf{t}_r = \mathbf{s}_r/2$ for strekkstaven.



Figur 3-8 Mises og Tresca flyteflaten i deviatorisk plan og som skjæring med s_1 - s_2 planet.

Både Mises og Tresca kriteriet representerer en sylindrisk flate i hovedspenningsrommet med sylindreraksen langs hydrostatisk akse. Hvis vi ser i det deviatoriske planet, ser vi Mises flyteflate som en sirkel og Tresca flyteflate som en regulær 6-kant, se Figur 3-8. Spenningene kan ikke ligge utenfor flyteflaten.

Den ekvivalente spenningen, σ_e i Mises-kriteriet, kan uttrykkes ved koordinatspenningene. Resultatet er

$$\sigma_e = \left[s_{11}^2 + s_{22}^2 + s_{33}^2 - s_{11}s_{22} - s_{22}s_{33} - s_{33}s_{11} + 3s_{12}^2 + 3s_{23}^2 + 3s_{31}^2 \right]^{1/2}$$

eller

$$\sigma_e = \left[\frac{1}{2}(s_{11} - s_{22})^2 + \frac{1}{2}(s_{22} - s_{33})^2 + \frac{1}{2}(s_{33} - s_{11})^2 + 3s_{12}^2 + 3s_{23}^2 + 3s_{31}^2 \right]^{1/2}$$

I Tresca-kriteriet må vi beregne hovedspenningene. For plan spenning og plan tøyning kan spenningsmatrisen (koordinatspenninger) skrives

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Plan spenning: } s_{33} = 0 \\ \text{Plan tøyning: } s_{33} \neq 0 \end{array}$$

Hovedspenningene i dette tilfellet er:

$$s_{1,2} = \frac{s_{11} + s_{22}}{2} \pm \left[\left(\frac{s_{11} - s_{22}}{2} \right)^2 + s_{12}^2 \right]^{1/2}$$

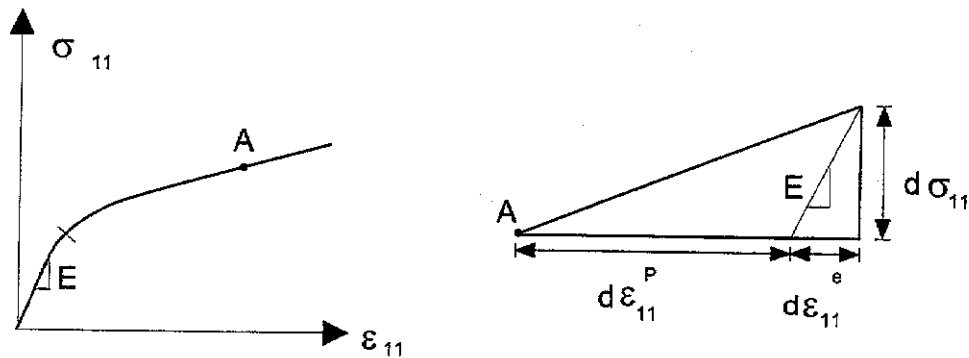
$$s_3 = s_{33}$$

$$s_{maks} = \max(s_1, s_2, s_3)$$

$$s_{\min} = \min(s_1, s_2, s_3)$$

3.2.4 Flyteloven

En enakset strekkprøve viser en sammenheng mellom spenning og tøyning gitt av Figur 3-9.



Figur 3-9 Spenning- tøyningskurve til en strekkprøve.

I et punkt A på kurven vil spenningen øke med $d s_{11}$ når tøyningen øker med $d e_{11}$. Vi splitter opp tøyningsinkrementet i en elastisk og en plastisk del:

$$d e_{11} = d e_{11}^e + d e_{11}^p$$

eller:

$$\dot{e}_{11} = \dot{e}_{11}^e + \dot{e}_{11}^p$$

hvor

$$d e_{11}^e = \frac{d s_{11}}{E}$$

Det elastiske tøyningsinkrementet er reversibelt ("vi får det tilbake når vi laster av") mens det plastiske tøyningsinkrementet er irreversibelt.

I det generelle tilfellet skriver vi tilsvarende:

$$d e_{ij} = d e_{ij}^e + d e_{ij}^p$$

eller

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^e + \dot{e}_{ij}^p$$

hvor sammenhengen mellom $d e_{ij}^e$ og $d s_{kl}$ finnes ved hjelp av E og ν (E-modul og tverrkontraksjon) for et isotropt materiale. Fra tidligere årskurs husker vi Hookes lov som beskriver sammenhengen mellom tøyning og spenning i det elastiske området. Før flytning inntreffer har vi ikke plastisk tøyning, $d e_{ij}^p = 0$.

Flyteloven setter det plastiske tøyingsinkrementet, $d\mathbf{e}_{ij}^p$, i sammenheng med spenningene. Dette kan uttrykkes generelt slik:

$$d\mathbf{e}_{ij}^p = dI g_{ij}(\mathbf{s}_{kl})$$

hvor dI er en ubestemt skaleringsfaktor og g_{ij} er en eller annen funksjon av spenningene. En spesiell formulering av flyteloven ble foreslått av Von Mises i 1928 og uttrykkes slik:

$$d\mathbf{e}_{ij}^p = dI \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} \quad \text{eller} \quad \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p = \dot{I} \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} \quad (3.10)$$

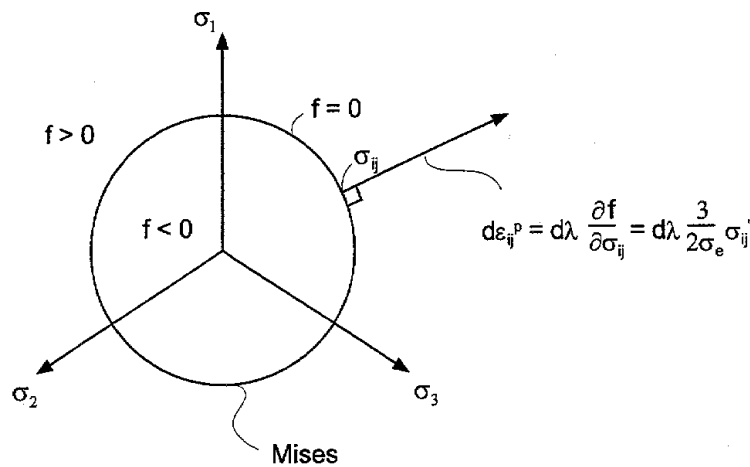
hvor f er flytefunksjonen gitt av ligning (3.8).

Fordi gradienten til f forekommer på høyresiden i ligning (3.10), må det plastiske tøyingsinkrementet være rettet langs normalen til flyteflaten. Dette kalles for normaliteten. En matematisk og fysikalsk tolkning av normaliteten ble i senere tid gitt av Drucker i 1952. Hvis vi deriverer f med hensyn på spenningskomponentene \mathbf{s}_{ij} får vi:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} &= \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}}(s_e) = \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}'_{kl} \mathbf{s}'_{kl}} \\ &= \frac{1}{2s_e} \frac{3}{2} 2\mathbf{s}'_{kl} \frac{\mathcal{I}\mathbf{s}'_{kl}}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} = \frac{3}{2s_e} \mathbf{s}'_{kl} \frac{\mathcal{I}}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} \left(\mathbf{s}_{kl} - \frac{1}{3} \mathbf{s}_{mm} \mathbf{d}_{kl} \right) \\ &= \frac{3}{2s_e} \mathbf{s}'_{kl} \left(\mathbf{d}_{kl} \mathbf{d}_{jl} - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{d}_{kl} \right) = \frac{3}{2s_e} \left(\mathbf{s}'_{ij} - \frac{1}{3} \mathbf{d}_{ij} \mathbf{s}'_{kk} \right) \\ \Rightarrow \quad \frac{\mathcal{I}f}{\mathcal{I}\mathbf{s}_{ij}} &= \frac{3}{2s_e} \mathbf{s}'_{ij} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Her er s_e ekvivalentspenningen gitt av ligning (3.8) og \mathbf{s}'_{ij} er de deviatoriske spenningene.

Figur 3-10 viser den radielle retningen på det plastiske tøyingsinkrementet for et Mises-materiale i det deviatoriske planet.

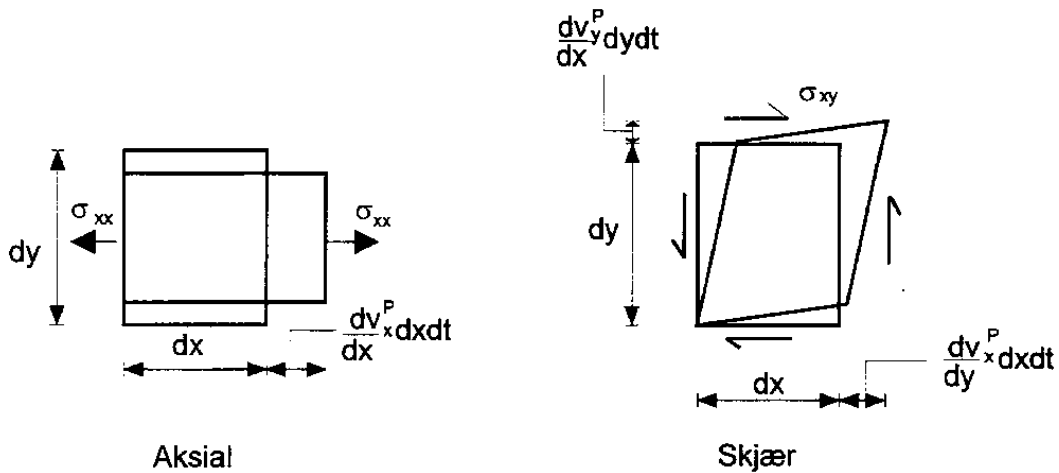


Figur 3-10 Plastisk tøyingsinkrement for et Mises-materiale sett inn mot det deviatoriske planet.

Vi ser at det plastiske tøyingsinkrementet er deviatorisk ($d\mathbf{e}^p_{kk}=0$).

Effektforbruk ved plastisk deformasjon

Vi betrakter et materialelement med dimensjonene dx , dy og dz som er belastet med normalspenning i x-retning og med skjærspenning i xy-planet. Fra tiden t til tiden $t+dt$ økes normalspenningen med $d\mathbf{s}_{xx}$ og skjærspenningen med $d\mathbf{s}_{xy}$. Vi får en infinitesimal plastisk lengdeendring og skjærendring på grunn av spenningsøkningen. Spenningene og de infinitesimale deformasjonene er vist i Figur 3-11.



Figur 3-11 Lengdeendring og skjærendring på grunn av en spenningsøkning.

Arbeid i løpet av tiden dt over volumet $dV=dx dy dz$ kan uttrykkes slik:

$$w dV dt = \left(\mathbf{s}_{xx} \frac{\int v_x^p}{\int x} + \mathbf{s}_{xy} \frac{\int v_x^p}{\int y} + \mathbf{s}_{xy} \frac{\int v_y^p}{\int x} \right) dx dy dz dt$$

hvor v_x^p og v_y^p er hastighetene pga. plastisk deformasjon i hhv. x - og y -retning. Effektforbruk per volum- og tidsenhet blir da

$$w = \mathbf{s}_{xx} \frac{\int v_x^p}{\int x} + \mathbf{s}_{xy} \left(\frac{\int v_x^p}{\int y} + \frac{\int v_y^p}{\int x} \right) = \mathbf{s}_{xx} \dot{\mathbf{e}}^p_{xx} + 2\mathbf{s}_{xy} \dot{\mathbf{e}}^p_{xy}$$

I et generelt 3-dimensjonalt tilfelle kan vi derfor skrive effektforbruket:

$$w = \mathbf{s}_{ij} \dot{\mathbf{e}}^p_{ij} \quad (9 \text{ ledd}) \tag{3.12}$$

Hvert ledd i spenningsmatrisen skal altså multipliseres med tilsvarende ledd i tøyingsratematisen. Husk at $\mathbf{s}_{ij}=\mathbf{s}_{ji}$ og $\dot{\mathbf{e}}_{ij}=\dot{\mathbf{e}}_{ji}$. Vi definerer den ekvivalente plastiske tøyingsraten, $\dot{\mathbf{e}}_e$, slik at effekten (per volumenhet) skal bli den samme enten vi bruker de

ekvivalente størrelsene for spenning og tøyingsrate, eller om vi bruker de enkelte spenninger og de tilsvarende tøyingsrater.

$$\mathbf{s}_e \dot{\mathbf{e}}_e = \mathbf{s}_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p = w$$

Innsatt for deviatorisk og hydrostatisk spenning fåes:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_e \dot{\mathbf{e}}_e &= (\mathbf{s}'_{ij} + \mathbf{s}_0 \mathbf{d}_{ij}) \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p \\ &= \mathbf{s}'_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p + \mathbf{s}_0 \mathbf{d}_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p \\ &= \mathbf{s}'_{ij} \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p \quad (\dot{\mathbf{e}}_{kk}^p = 0) \end{aligned}$$

Vi bruker ligning (3.10) og (3.11) og får:

$$\mathbf{s}_e \dot{\mathbf{e}}_e = \mathbf{s}'_{ij} \dot{\mathbf{l}} \frac{3}{2\mathbf{s}_e} \mathbf{s}'_{ij} = \mathbf{s}_e \dot{\mathbf{l}}$$

hvor uttrykket for σ_e er brukt. Vi har da at:

$$\dot{\mathbf{l}} = \dot{\mathbf{e}}_e$$

eller

$$d\mathbf{l} = d\mathbf{e}_e$$

Flytelovent for et Mises materiale får nå sin endelige form:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^p = \dot{\mathbf{e}}_e \frac{3}{2\sigma_e} \sigma'_{ij} \quad \text{eller} \quad d\mathbf{e}_{ij}^p = d\mathbf{e}_e \frac{3}{2\sigma_e} \sigma'_{ij} \quad (3.13)$$

Ligningene (3.13) er Levy-Mises ligningene som i plastisitetsteorien ofte kalles plastisitetligningene.

Vi ønsker nå å uttrykke den ekvivalente tøyingsraten ved tøyingsratekomponentene. Det kan gjøres ved å multiplisere ligning (3.13) med seg selv (resultat blir en skalar):

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij}^p \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p = (\dot{\mathbf{e}}_e)^2 \frac{9}{4\sigma_e^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = (\dot{\mathbf{e}}_e)^2 \frac{3}{2}$$

Resultat:

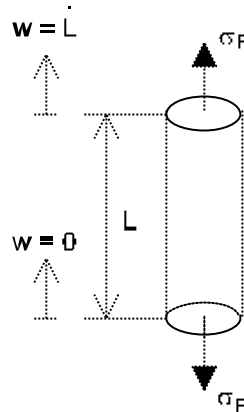
$$\dot{\mathbf{e}}_e = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p \dot{\mathbf{e}}_{ij}^p} \quad (3.14)$$

eller utskrevet

$$\dot{\mathbf{e}}_e = \left[\frac{2}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{11}^p)^2 + \frac{2}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{22}^p)^2 + \frac{2}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{33}^p)^2 + \frac{4}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{12}^p)^2 + \frac{4}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{23}^p)^2 + \frac{4}{3} (\dot{\mathbf{e}}_{31}^p)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Eksempel 3-1: Enakset strekk

Spesialisér likningene (3.14) og (3.8) til enakset strekk:



$\sigma_{zz} = \sigma_F$ og alle andre spenningskomponenter er null.

$$\dot{\mathbf{e}}_{zz} = \frac{\int u_z}{\int z} = \frac{\dot{L}}{L} = \dot{\mathbf{e}}$$

og

$$\dot{\mathbf{e}}_{xx} = \dot{\mathbf{e}}_{yy} = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}}_{zz}$$

fordi

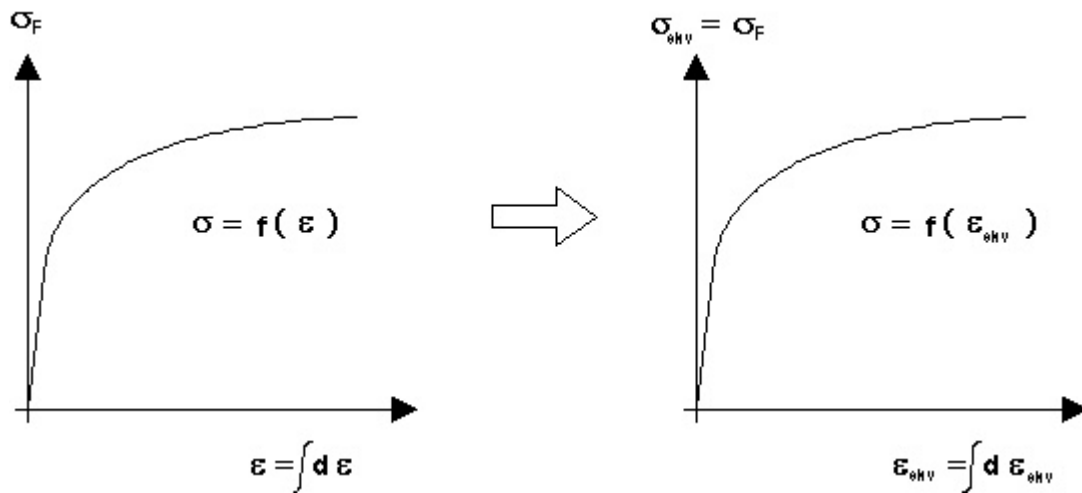
$$\dot{\mathbf{e}}_{xx} + \dot{\mathbf{e}}_{yy} + \dot{\mathbf{e}}_{zz} = 0$$

$$\mathbf{s}_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2} (\mathbf{s}_{zz}^2 + \mathbf{s}_{zz}^2)} = \|\mathbf{s}_{zz}\| = \mathbf{s}_F$$

$$d\mathbf{e}_{ekv} = \sqrt{\frac{2}{9} \left[\frac{9}{4} (d\mathbf{e}_{zz}^2 + d\mathbf{e}_{zz}^2) \right]} = \|d\mathbf{e}_{zz}\| = d\mathbf{e}$$

Vi kan altså konkludere:

Under forutsetning av isotropt materiale (like egenskaper i alle retninger) kan fastningskurven under enakset strekk (\mathbf{s} = sann spenning, \mathbf{e} = sann tøyning) beskrive fastning ved 3-dimensjonal spennings- og tøyningstilstand, Figur 3-12.



Figur 3-12 Fastningskurve ved enakset strekk er vist i figuren til venstre. Denne kan også beskrive fastningen ved en tre-dimensjonal spenningstilstand, figur til høyre.

Eksempel 3-2: Plastisk deformasjon

En kube av et metallisk materiale har opprinnelige dimensjonene 10x10x10 mm. Laboratorieforsøk har vist at materialets spennings-tøyningskurve kan beskrives ved Ludwigs ligning:

$$\mathbf{s}_F = 400(\mathbf{e}_{ekv})^{0.5} \text{ MPa}$$

Kuben belastes biakselst ($\mathbf{s}_3=0$) slik at under prosessen er

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{\mathbf{e}_2} = \frac{1}{2}$$

Se bort fra elastiske tøyninger og bestem σ_2 og kubens endelige dimensjoner når $\mathbf{s}_1 = 200$ MPa.

Løsning til Eksempel 3-2.

Siden elastiske tøyninger negliseres, vil Levy-Mises likningene være holdbare. Ingen volumendring under plastisk deformasjon:

$$d\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_3 = 0 \quad \text{og} \quad d\mathbf{e}_2 = 2d\mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{e}_3 = -3d\mathbf{e}_1$$

$$\sigma_3=0 \text{ gir at: } \mathbf{s}_0 = \frac{1}{3}(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2)$$

Ved å benytte σ_0 i Levy-Mises likningene får vi:

$$d\mathbf{e}_1 = \frac{3d\mathbf{e}_{ekv}}{2\mathbf{s}_{ekv}} \left(\frac{2}{3}\mathbf{s}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{s}_2 \right) = \frac{d\mathbf{e}_{ekv}}{\mathbf{s}_{ekv}} \left(\mathbf{s}_1 - \frac{\mathbf{s}_2}{2} \right)$$

$$d\mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{e}_{ekv}}{\mathbf{s}_{ekv}} \left(\mathbf{s}_2 - \frac{\mathbf{s}_1}{2} \right)$$

De to siste likningene gir:

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{d\mathbf{e}_2} = \frac{200 - \frac{\mathbf{s}_2}{2}}{\mathbf{s}_2 - 100} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\mathbf{s}_2 = 250 \text{ MPa}$$

Nå kan σ_{ekv} bestemmes: $\mathbf{s}_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}[(200 - 250)^2 + (250 - 0)^2 + (0 - 200)^2]} = 229.1 \text{ MPa}$

Siden $\sigma_{ekv} = \sigma_F$ ved flytning må: $\mathbf{s}_F = \mathbf{s}_{ekv} = 400(\mathbf{e}_{ekv})^{0.5} = 229.1 \quad \Rightarrow$

$$\mathbf{e}_{ekv} = 0.328$$

Nå bruker vi uttrykket for ekvivalent tøyning:

$$\mathbf{e}_{ekv} = 0.328 = \sqrt{\frac{2}{3}[\mathbf{e}_1^2 + (2\mathbf{e}_1)^2 + (-\mathbf{e}_1)^2]} = \mathbf{e}_1 \sqrt{\frac{28}{3}} \quad \Rightarrow$$

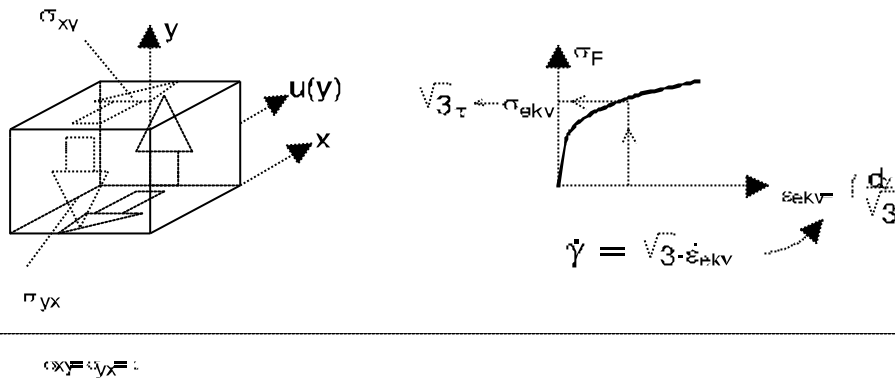
$$\mathbf{e}_1 = 0.1074\mathbf{e}_2 = 0.2148\mathbf{e}_3 = -0.3222$$

Nå kan endelige dimensjonene bestemmes:

$$l_1 = l_0 e^{\mathbf{e}_1} = 10e^{0.1074} = 11.13 \text{ mm}$$

$$l_2 = l_0 e^{\mathbf{e}_2} = 12.37 \text{ mm}$$

$$l_3 = l_0 e^{\mathbf{e}_3} = 7.25 \text{ mm}$$



Figur 3-13 Flyting for ren skjærtilstand.

Ren skjærtilstand

La oss betrakte et spesialtilfelle med rent skjær, se også Figur 3-13. Hastighetsfeltet er $v_x = v_x(y)$, $v_y = v_z = 0$ og skjærtøyningshastigheten er gitt av

$$\dot{\epsilon}_{xy} = \dot{\epsilon}_{yx} = \frac{1}{2} \frac{dv_x}{dy} = \frac{1}{2} \dot{\gamma}$$

Plastisk effektforbruk blir:

$$w = s_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + s_{yx} \dot{\epsilon}_{yx} = 2s_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} = t\dot{\gamma}$$

Ekvivalent spenning og tøyningshastighet er uttrykt ved

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{3\sigma_{xy}^2} = \sqrt{3}|\tau|$$

og

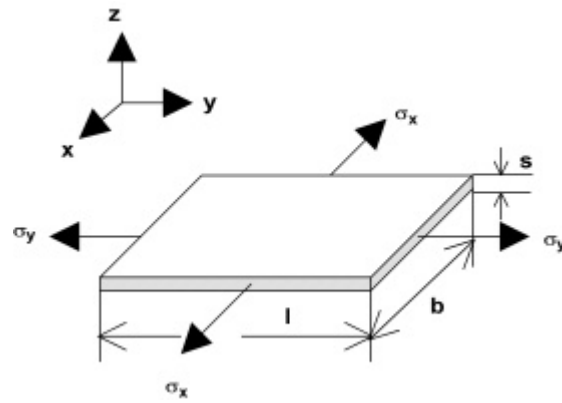
$$\dot{\epsilon}_{ekv} = \sqrt{\frac{4}{3}\dot{\epsilon}_{xy}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}|\dot{\gamma}|$$

Flytbetingelse:

$$\sigma_{ekv} = \sqrt{3}|\tau| = \sigma_F \text{ D } \tau_F = \frac{\sigma_F}{\sqrt{3}}$$

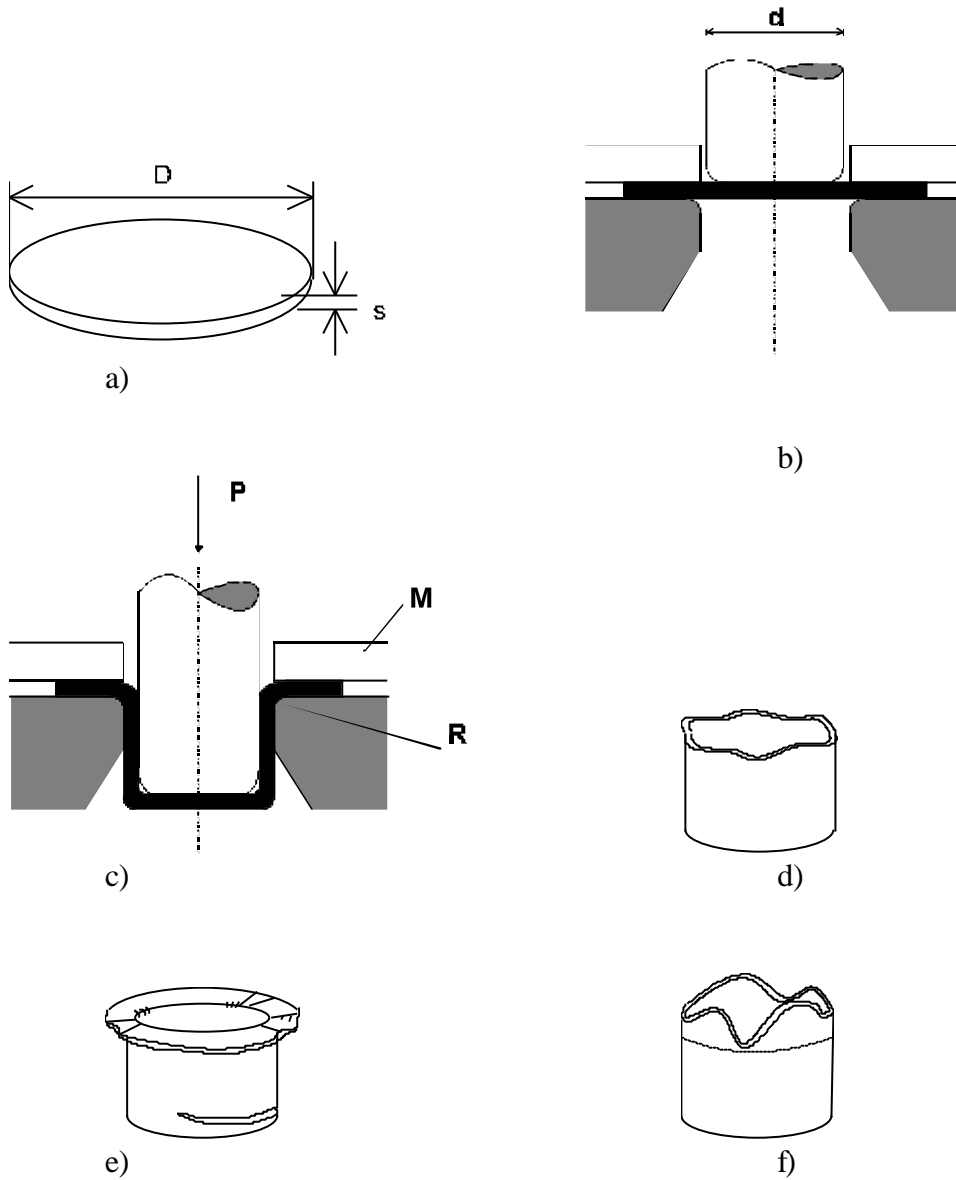
Plan spenning – formbarhet (plateforming)

Figur 3-14 viser en tilstand av plan spenning, det vil si at alle spenningskomponenter på tvers av platens plan er null: $s_{zz}=0$, $s_{zx} = s_{xz} = 0$, $s_{zy} = s_{yz} = 0$. Dersom x,y-koordinatene orienteres parallelt med hovedspenningsretningene i platens plan, forutsettes det at hovedspenningsretningene har samme orientering i forhold til platen under belastningen. Ved dyptrekking av en plate, Figur 3-15, er disse forhold tilnærmet tilfredsstillt i deler av platen.



Figur 3-14 Plan spenningstilstand.

Figur 3-15 a) viser plateemnet med diameter D og platetykkelse s . Emnet plasseres i verktøyet, b), og platen trekkes innover av stempelet samtidig som den bøyes over dyneradienten R . Et mothold M presses mot emnet for å hindre bukling, c). Et tilfredsstillende dyptrukket produkt er vist i d) mens platens *formbarhetsgrense* er overskredet i e). Figur 3-15 f) viser et produkt der emnet er trukket ujevnt over dynen. Dette fører til ujevn veggtykkelse og stor andel skrap fordi mye av toppen av produktet må kappes vekk. Årsaken til denne ujevne deformasjon er sannsynligvis at egenskapene til platen er retningsbestemte. Platen er *anisotrop*.



Figur 3-15 Dyp trekking.

For plan spenning, med koordinatsystemet orientert i hovedspenningsretningene, vil spenningskomponentene være

$$\mathbf{s}_{xx} = \mathbf{s}_x \quad , \quad \mathbf{s}_{yy} = \mathbf{s}_y$$

mens alle andre komponenter er lik null. Da vil flyteflaten være gitt ved

$$\mathbf{s}_{ekv} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\mathbf{s}_{xx} - \mathbf{s}_{yy})^2 + \mathbf{s}_{xx}^2 + \mathbf{s}_{yy}^2]} = \mathbf{s}_F$$

eller

$$\mathbf{s} = \sqrt{\mathbf{s}_x^2 - \mathbf{s}_x \mathbf{s}_y + \mathbf{s}_y^2} = \mathbf{s}_F$$

I Figur 3-16 er flyteflaten ved plan spenningstilstand inntegnet. Spenningstilstand ved de forskjellige steder på arbeidsstykket under trekkeprosessen, er angitt på flyteflaten.

Tøyningsinkrementene er gitt ved, Figur 3-14:

$$de_x = \frac{dl}{l}, \quad de_y = \frac{db}{b}, \quad de_z = \frac{ds}{s}$$

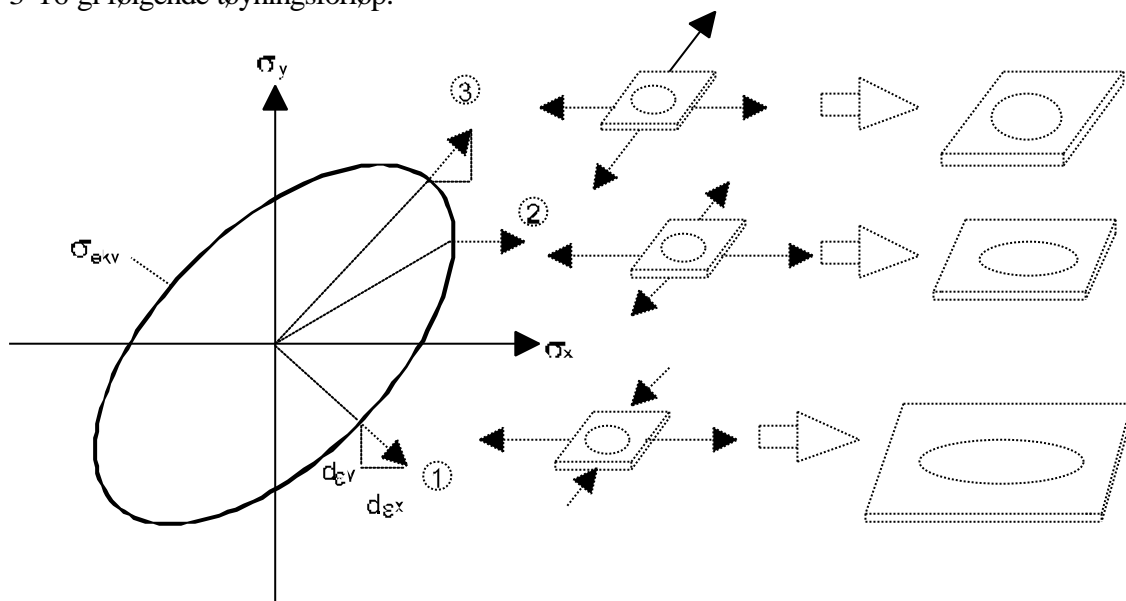
og betingelsen om volumkonstans gir:

$$de_x + de_y + de_z = 0$$

det vil si at tykkelsesendringen blir

$$de_z = -(de_x + de_y)$$

Siden tøyningsinkrementene står normalt til flyteflaten, vil de tre spenningstilstander på Figur 3-16 gi følgende tøyningsforløp:



Figur 3-16 Spenningstilstanden for tre forskjellige stadier i dypttrekkings-prosessen. 1: rent skjær, 2: plan tøyning, 3: biaksiell strekking.

Rent skjær:

$$de_x = -de_y, de_z = 0$$

1. Plan tøyning:

$$de_y = 0, \quad de_z = -de_x$$

2. Biaksiell strekking:

$$de_x = de_y, \quad de_z = -(de_x + de_y)$$

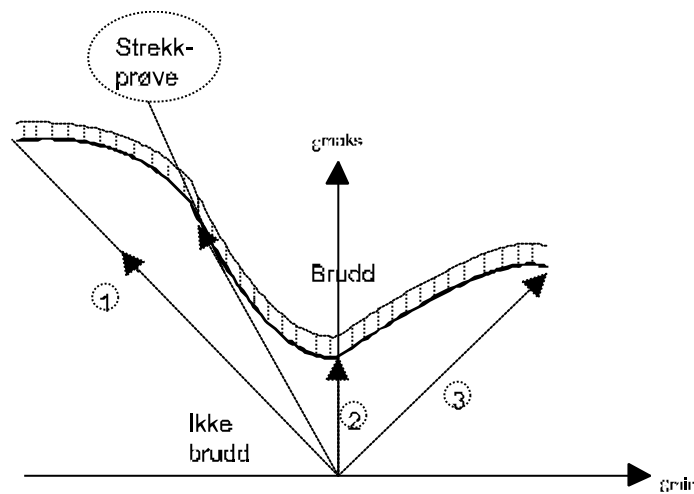
Ved å legge små sirkler på emnet kan de lokale tøyninger på de forskjellige deler av arbeidsstykket følges gjennom formeprosessen, Figur 3-16. Fremgangsmåten er slik at man trykker et sirkelnett på emnets overflate hvor sirklene har en opprinnelig diameter l_0 eller b_0 . Deretter formes emnet og så måles den korteste og lengste diameteren på hver sirkel (som nå er ellipseformet) i deler av emnet hvor skade er oppstått, disse betegnes hhv. med b og l . De lokale tøyningene kan da beregnes som følger:

$$e_{maks} = \int d\epsilon_x = \int \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0}$$

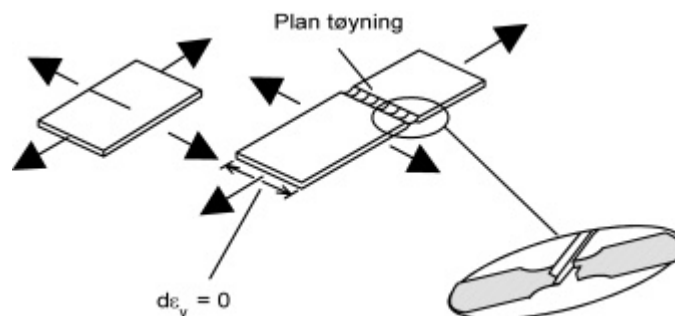
$$e_{min} = \int d\epsilon_y = \int \frac{db}{b} = \ln \frac{b}{b_0}$$

På denne måten kan tøyingsforløp forfølges gjennom prosessen i et formbarhetsdiagram (eng: "forming limit diagram"), se Figur 3-16.

Formbarhetsdiagrammet viser at tøyingsveien bestemmer hvor stor tøyning et materiale kan tåle uten at brudd inntre. Formbarhetsdiagrammet viser f.eks. at materialet tåler å formes mer i biaksiell strekking (tøyingsvei (3)) enn plan tøyning ($\epsilon_{min}=0$) (tøyingsvei (2)). Årsaken er at det lettere dannes en innsnøring ved plan tøyning enn ved biaksiell strekking, Figur 3-18.



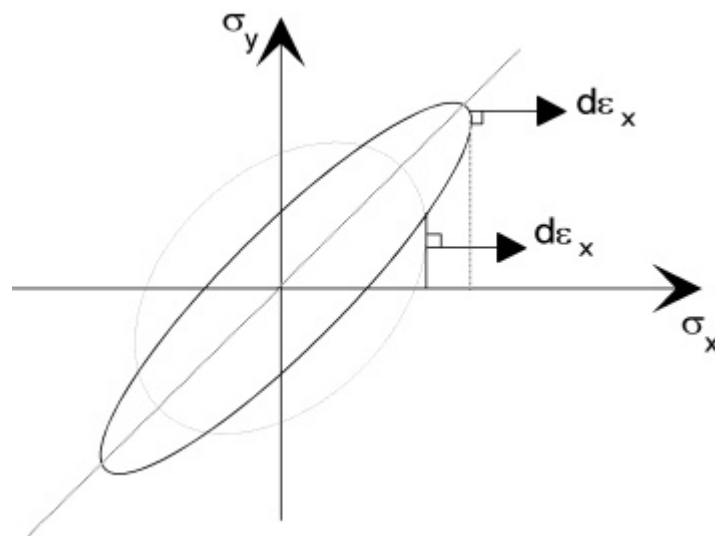
Figur 3-17 Formbarhetsdiagram.



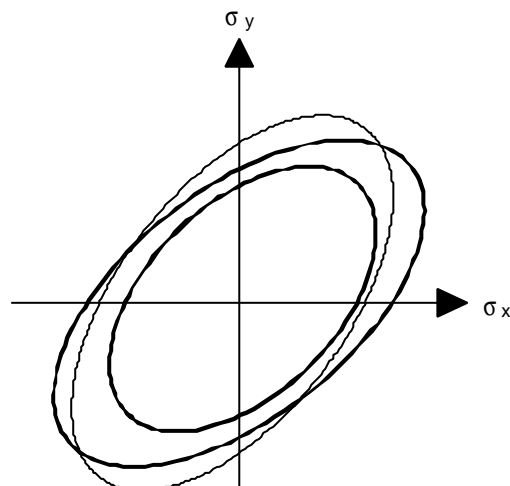
Figur 3-18 Brudd skjer ved lokal innsnøring og duktilt brudd.

Gjennom materialutvikling er det mulig å "designe" mikrostrukturen slik at materialet får øket motstand mot tykkelsesreduksjon, Figur 3-19. Aluminiumtettet dyptrekingsstål er eksempel på et materiale med stor motstand mot tykkelsesreduksjon. Dette er en svært viktig egenskap ved produksjon av f.eks. bilkarosserier.

Dersom materialet fastner forskjellig langs forskjellige lastveier, vil materialet flyte lettere i en retning enn i en annen, og en får typisk "øredannelse" som vist på Figur 3-15 f). Aluminiumlegeringen AlMgMn (AA 3004) er "designet" slik at den har minimum øredannelse. Dette fordi dette materialet benyttes til leskedrikkbokser der øredannelsen må være slik at avkapp blir minst mulig.



Figur 3-19 Materiale med stor motstand mot tykkelsesreduksjon.



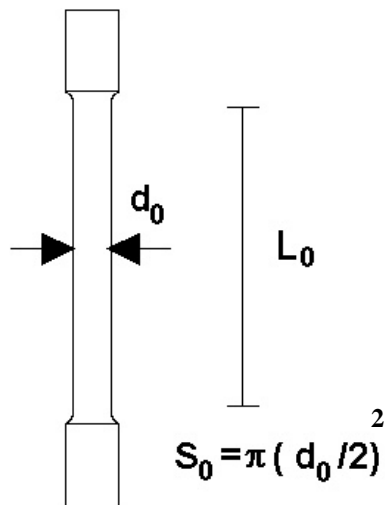
Figur 3-20 Anisotrop fastning.

3.3 Strekkstaven

Ved et strekkforsøk med en prøvestav som har diameter $d_0=10$ mm og en midlere korndiameter på 30 μm , vil det være ca.

$$N = \frac{p(10 \cdot 10^{-3})^2}{p(10 \cdot 10^{-6})^2} \approx 0.1 \cdot 10^6 = 100\,000$$

korn over tverrsnittet, se Figur 3-21. Materialets oppførsel på makronivå er den samlede virkning av aktiverte glidesystem innenfor alle disse kornene.



Figur 3-21 En strekkstav.

Figur 3-22 viser stadier i strekkforsøk for et duktilt metallisk materiale. Ved belastning P_f begynner staven å deformeres plastisk. Denne verdi defineres ofte som den last der staven har fått 0.2 % varig forlengelse (etter avlastning).

$$e = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{L - L_0}{L_0} = 0.002$$

Materialets flytespenning $R_{p0.2}$ defineres som: $R_{p0.2} = \frac{P_f}{S_0}$

Belastes nå strekkstaven ytterligere, vil maksimal last P_m nås. Ut fra denne verdien defineres materialets "bruddspenning" R_m som

$$R_m = \frac{P_m}{S_0}$$

Etter at maksimal last er nådd, skjer det en lokal innsnøring i prøvestaven. Dette er en instabilitet i den plastiske flyt — fra homogen forlengelse til en lokalisert inhomogen deformasjon. Etterhvert som innsnøringen øker, vil det bygges opp en treakset strekkspenningstilstand i innsnøringen. Observasjoner av materialet i strekkstaven viser at porer dannes og vokser i sentrum av innsnøringen. En sprekk dannes der og vokser radielt utover inntil det skjer en avskjæring av restverrsnittet. Skjærlepper dannes, strekkstaven "ryker", et brudd oppstår.

Bruddforlengelsen A defineres ut fra lengden L_u mellom to avmerkede riss på den opprinnelige prøvestaven i avstand L_0 fra hverandre. De to bruddelene settes sammen så godt det lar seg gjøre ved måling av L_u .

$$A = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 [\%]$$

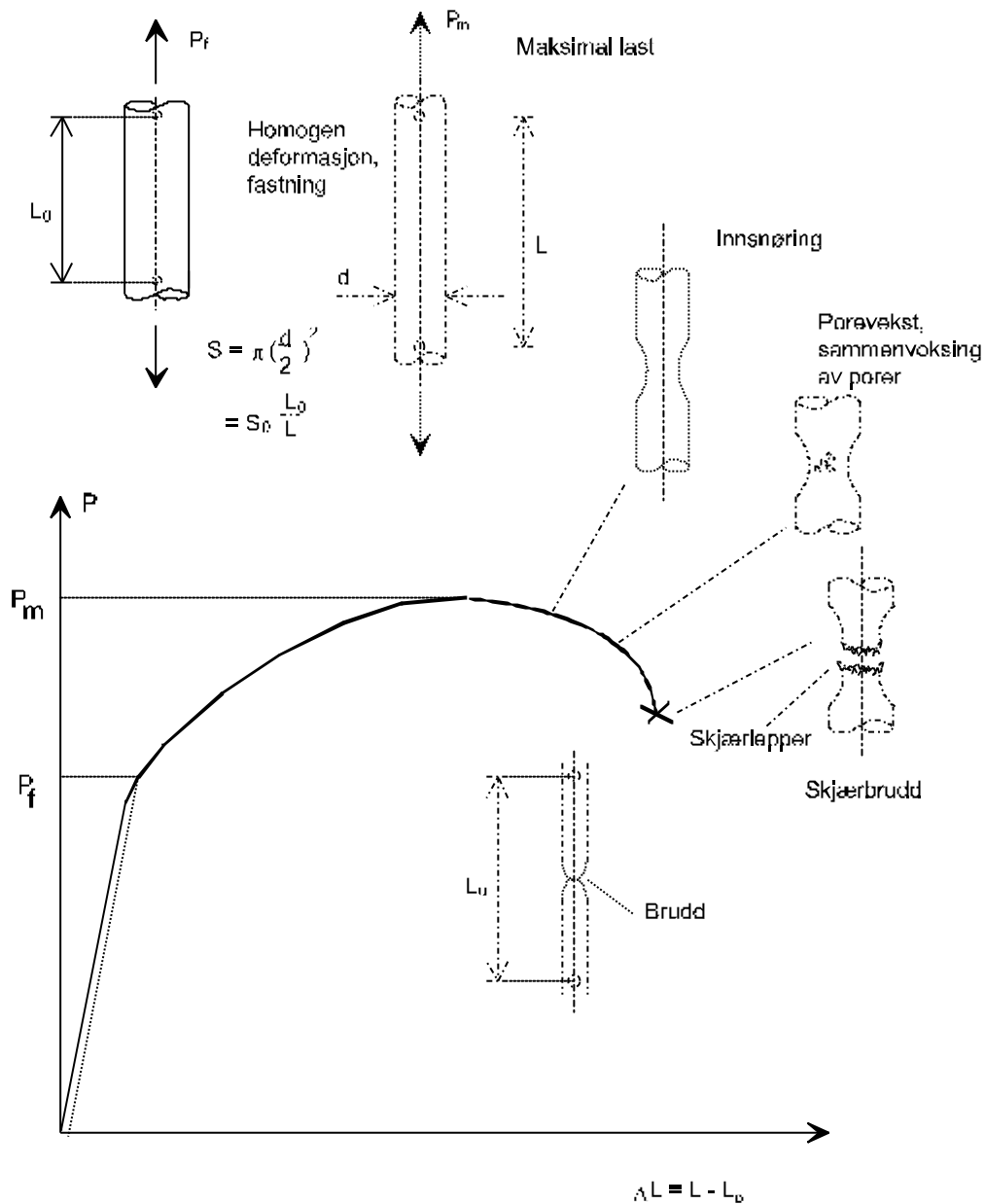
A_{10} refereres til målestav med $L_0=10d_0$ og A_5 refereres til målestav med $L_0=5d_0$.

Bruddkontraksjonen Z defineres som

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100 [\%]$$

der S_u er det minste tverrsnittsareal av staven etter brudd.

Et konstruksjonsmateriale er som regel karakterisert ved egenskapene $R_{p0,2}$, R_m og A_5 . Med unntak av $R_{p0,2}$ er disse størrelser lite egnet til å karakterisere materialets mekaniske tilstand ved plastisk forming, plastisk instabilitet, skadeutvikling og sammenheng mellom mikrostruktur og egenskaper. Det er nødvendig å finne mer grunnleggende størrelser til å karakterisere materialene.



Figur 3-22 Stadier i et strekkforsøk for et duktilt metallisk materiale.

I området av strekkstavforlengelsen *der deformasjonen er homogen* ($P < P_m$) er den sanne flytspenningen s_F gitt ved

$$s = \frac{P}{S} = s_F$$

der S er tverrsnittsarealet av staven ved lasten P . Tøyningshastigheten $\dot{\epsilon}$ er definert ved

$$\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{\dot{L}}{L}$$

der L er hastigheten som markeringspunktene fjerner seg fra hverandre med. Dersom en deformasjon skal foregå med konstant tøyningshastighet $\dot{\epsilon}_k$:

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{\dot{L}}{L} = \dot{\mathbf{e}}_k$$

$$\frac{dL}{L} = \dot{\mathbf{e}}_k dt$$

$$\ln \frac{L}{L_0} = \dot{\mathbf{e}}_k t$$

$$L = L_0 e^{\dot{\mathbf{e}}_k t}$$

eller

$$L = L_0 e^{\mathbf{e}}$$

Sann tøyning \mathbf{e} er definert som

$$\mathbf{e} = \int_0^t \dot{\mathbf{e}} dt = \int_0^t \frac{\dot{L}}{L} dt = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0}$$

Plastisk flyting foregår uten volumendring. Innenfor det homogene området ($P < P_m$) har vi altså

$$SL = S_0 L_0 = \text{konstant}$$

Lasten P er gitt ved

$$P = \mathbf{s}_F S = \mathbf{s}_F S_0 \frac{L_0}{L} = \mathbf{s}_F S_0 e^{-\mathbf{e}}$$

En har da at $P = P_m$ når

$$\frac{dP}{d\mathbf{e}} = \frac{d\mathbf{s}_F}{d\mathbf{e}} S_0 e^{-\mathbf{e}} - \mathbf{s}_F S_0 e^{-\mathbf{e}} = 0$$

eller $P = P_m$ når

$$\frac{d\mathbf{s}_F}{d\mathbf{e}} = \mathbf{s}_F$$

se Figur 3-23. Materialets deformasjonsfastning, defineres ved

$$\frac{d\mathbf{s}_F}{d\mathbf{e}}$$

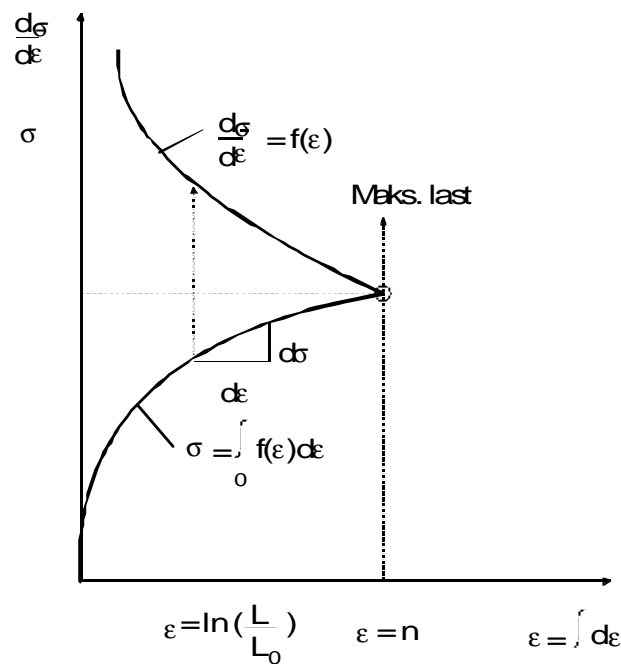
som ved kalddeformasjon beskrives ved "Ludwigs likning":

$$\mathbf{s}_F = K \mathbf{e}^n$$

n kalles "fastningskoeffisienten". Typiske verdier for n er tatt med i Tabell 3-1.

Tabell 3-1 Typiske fastningskoeffisienter.

Materiale	n
Lav-karbon stål	0.22
Høyfast lavlegert stål	0.18
301 austenittisk stål	0.48
3003-0 aluminium	0.24
70-30 messing	0.56



Figur 3-23 Maksimal last inntreffer når tøyningen $e =$ fastningskoeffisienten n .

Ved å derivere Ludwigs likning, får vi

$$\frac{dS_F}{de} = nKe^{n-1} = \frac{n}{e} S_F$$

dvs. $F = F_{maks}$ når

$$\frac{n}{e} S_F = S_F$$

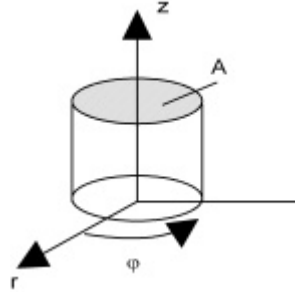
altså når

$$e = n$$

Maksimumlast nås altså når sann tøyning er lik fastningskoeffisienten n .

Etter at maksimum last er passert, vil innsnøringen begynne. P. W. Bridgman gjennomførte en analyse av spenningstilstanden i symmetriplanet av innsnøringen basert på

antakelse om homogen deformasjon over symmetriplanet. Vi skal nå følge Bridgmans analyse. Et sylindrisk koordinatsystem benyttes, Figur 3-24. A betegner tverrsnittsareal, ellers er betegnelsene definert på Figur 3-24 – Figur 3-27.



Figur 3-24 Et sylindrisk koordinatsystem som brukes i Bridgmans analyse.

Bridgman antok altså at tøyningssinkrementene i symmetriplanet, dvs. det minste tverrsnittsareal A i innsnøringen er konstante over tverrsnittet og lik

$$d\mathbf{e}_{rr} = d\mathbf{e}_{jj} = \frac{1}{2} \frac{dA}{A}$$

$$d\mathbf{e}_{zz} = -\frac{dA}{A}$$

Spenningstilstanden på overflata ved innsnøringen er:

$$\mathbf{s}_{rr} = \mathbf{s}_{jj} = 0$$

$$\mathbf{s}_z = \mathbf{s}_F$$

Dermed blir den hydrostatiske spenningskomponenten:

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{3}(\mathbf{s}_{rr} + \mathbf{s}_{jj} + \mathbf{s}_{zz}) = \frac{1}{3}\mathbf{s}_F$$

Deviatorspenningene (spenningsavvikene) er da ifølge von Mises flytelov gitt ved:

$$\mathbf{s}'_{rr} = -\frac{1}{3}\mathbf{s}_F$$

$$\mathbf{s}'_{jj} = -\frac{1}{3}\mathbf{s}_F$$

$$\mathbf{s}'_{zz} = \frac{2}{3}\mathbf{s}_F$$

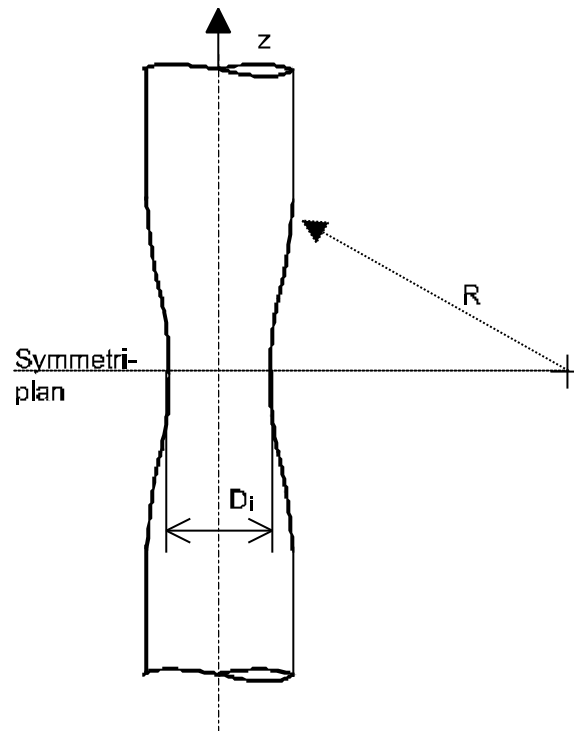
der

$$s'_{rr} = s_{rr} - s_0$$

$$s'_{jj} = s_{jj} - s_0$$

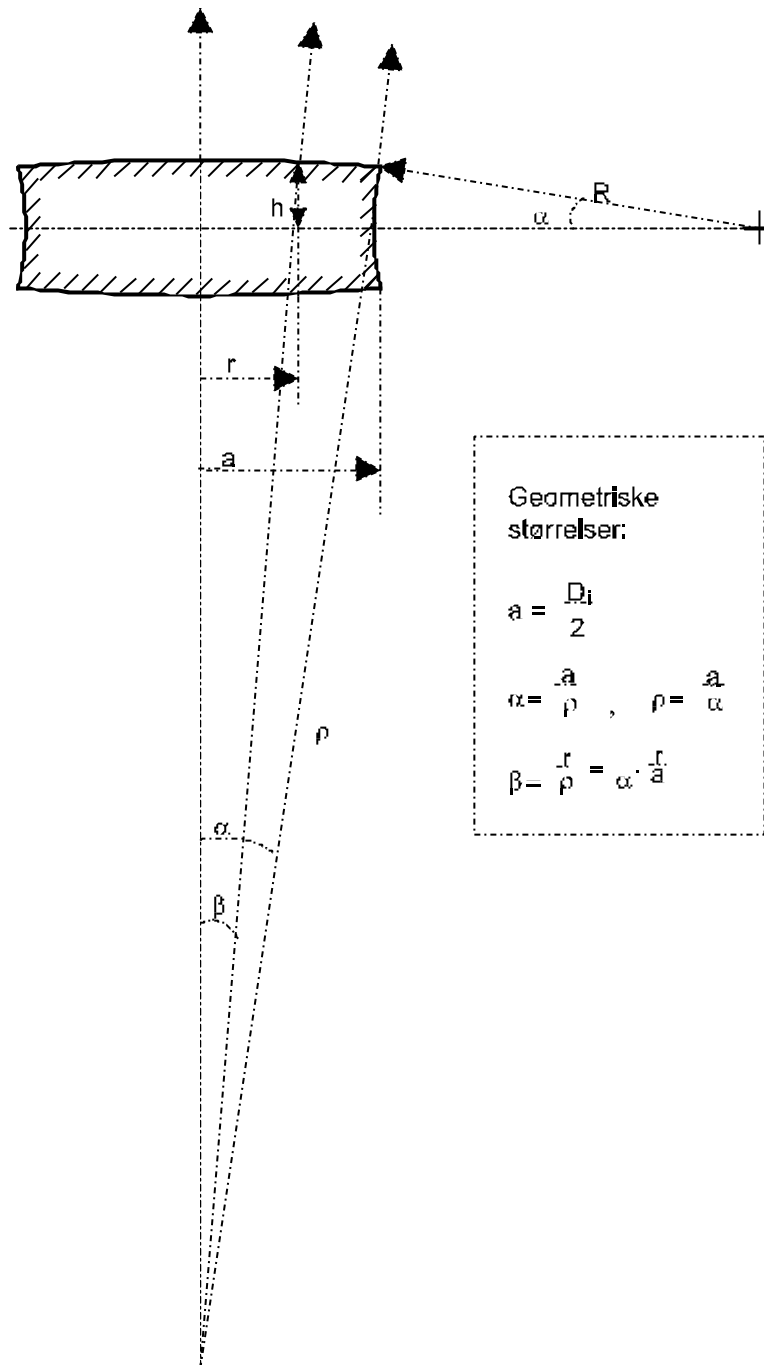
$$s'_{zz} = s_{zz} - s_0$$

σ_F er materialets flytespenning ved enakset strekk.

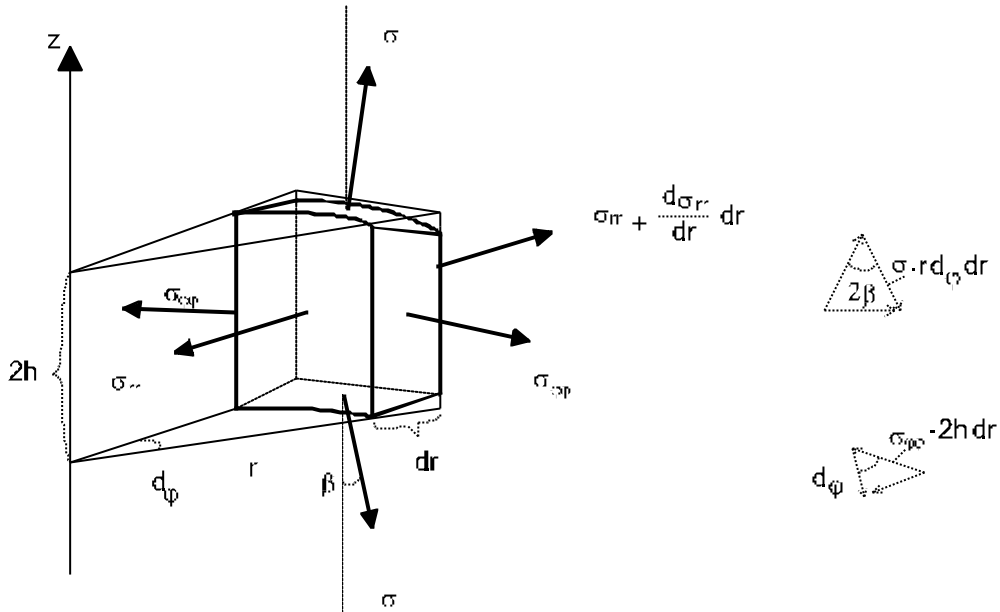


Figur 3-25 Definisjon av R og D_i i Bridgmans analyse.

Pga. den geometriske formen til innsnøringen vil det ikke være mulig å opprettholde enakset strekk der. Bridgman antok at største hovedspenning like inntil symmetriplanet var rettet langs overflaten av innsnøringen, dvs. en vinkel α i forhold til z -retningen, Figur 3-26, ved $r = a$, og at hovedspenningsretningen dreiet mot z -retningen innover mot sentrum av staven.



Figur 3-26 Et lite element rundt symmetriplanet i en stav med innsnøring. De tre øverste pilene viser hvordan Bridgman antok at største hovedspenning endrer retning utover mot overflaten.



Figur 3-27 Likevektsbetraktninger av et lite element.

Antakelsen om konstant tøyning i symmetriplanet i innsnøringen impliserer at deviatorspenningene er konstante over symmetritverrsnittet (Levy-Mises likningene). Det må altså være den hydrostatiske spenningskomponenten som varierer:

$$\mathbf{s}_{rr} = -\frac{1}{3}\mathbf{s}_F + \mathbf{s}_0(r) \tag{3.15}$$

$$\mathbf{s}_{\phi\phi} = -\frac{1}{3}\mathbf{s}_F + \mathbf{s}_0(r)$$

$$\mathbf{s}_{zz} = \frac{2}{3}\mathbf{s}_F + \mathbf{s}_0(r) \tag{3.16}$$

Variasjonen i $\mathbf{s}_0(r)$ over tverrsnittet finnes ved en likevektsbetraktning av et element som vist på Figur 3-27. Likevekt i r-retning krever

$$-\mathbf{s}_{rr} 2hr d\mathbf{j} + \left(\mathbf{s}_{rr} + \frac{d\mathbf{s}_{rr}}{dr} dr \right) (r + dr) 2(h - bdr) d\mathbf{j} + \mathbf{s}_{zz} 2br d\mathbf{j} dr - \mathbf{s}_{\phi\phi} 2h dr h \mathbf{j} = 0$$

hvis vi setter $\sin j = \mathbf{f}$ og $\sin b = \mathbf{b}$ for små vinkler. Dette gir

$$\frac{d\mathbf{s}_{rr}}{dr} + (\mathbf{s}_{zz} - \mathbf{s}_{rr}) \frac{\mathbf{b}}{h} + \frac{\mathbf{s}_{rr} - \mathbf{s}_{\phi\phi}}{r} = 0$$

Fra likningene (3.15) og (3.16) har vi

$$\mathbf{s}_{zz} - \mathbf{s}_{rr} = \mathbf{s}_F$$

$$\mathbf{s}_{rr} - \mathbf{s}_{jj} = 0$$

...og vi får

$$\frac{d\mathbf{s}_{rr}}{dr} = \frac{d\mathbf{s}_0}{dr}$$

Fra Figur 3-26 fås

$$\begin{aligned} h &= R \sin \mathbf{a} + r \cos \mathbf{b} - r \cos \mathbf{a} \\ &= R\mathbf{a} + \frac{1}{2}r(\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) \\ &= R\mathbf{a} + \frac{1}{2}\frac{a}{a}\left(\mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^2\frac{r^2}{a^2}\right) \\ &= \left(R + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}\right)\mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2}(2Ra + a^2 - r^2)\frac{\mathbf{a}}{a} \end{aligned}$$

som gir

$$\frac{\mathbf{b}}{h} = \frac{2r}{2Ra + a^2 - r^2}$$

og likevektslikningen blir

$$\frac{d\mathbf{s}_0}{dr} = -\mathbf{s}_F \frac{2r}{2Ra + a^2 - r^2}$$

Settes nå

$$\mathbf{x} = 2R\mathbf{a} + a^2 - r^2 \tag{3.17}$$

som gir

$$d\mathbf{x} = -2rdr$$

fås

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_F \int \frac{d\mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{s}_F \ln \mathbf{x} + C = \mathbf{s}_F \ln(2Ra + a^2 - r^2) + C$$

som med grensebetingelsen

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{3}\mathbf{s}_F$$

for $r=a$ (rent strekk) gir

$$\mathbf{s}_0 = \frac{1}{3}\mathbf{s}_F + \mathbf{s}_F \ln\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2Ra}\right)$$

og den søkte spenningstilstand er funnet

$$\mathbf{s}_{rr} = \mathbf{s}'_{rr} + \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_F \ln \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2Ra} \right) \quad (3.18)$$

$$\mathbf{s}_{jj} = \mathbf{s}'_{jj} + \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_F \ln \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2Ra} \right) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{s}_{zz} = \mathbf{s}'_{zz} + \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}_F + \mathbf{s}_F \ln \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2Ra} \right) \quad (3.20)$$

Den nødvendige kraft for å opprettholde plastisk flyt i innsnøringen blir dermed

$$\begin{aligned} P &= \int_0^a \mathbf{s}_{zz} 2\pi r dr \\ &= \mathbf{s}_F (1 - \ln(2Ra)) \pi a^2 - \mathbf{s}_F \int_0^a \ln(2Ra + a^2 - r^2) 2r dr \end{aligned}$$

Ved å sette inn ξ fra likning (3.17), får vi

$$-\int \ln x dx = x(\ln x - 1)$$

dvs.

$$\begin{aligned} P &= \mathbf{s}_F (1 - \ln(2Ra)) \pi a^2 \\ &\quad - \mathbf{s}_F \left\{ (2Ra + a^2 - r^2) \left[\ln(2Ra + a^2 - r^2) - 1 \right] \right\}_0^a \end{aligned}$$

$$P = \mathbf{s}_F A_i \left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)$$

$$\mathbf{s}_{\text{middel}} = \frac{P}{A_i} = \mathbf{s}_F \left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)$$

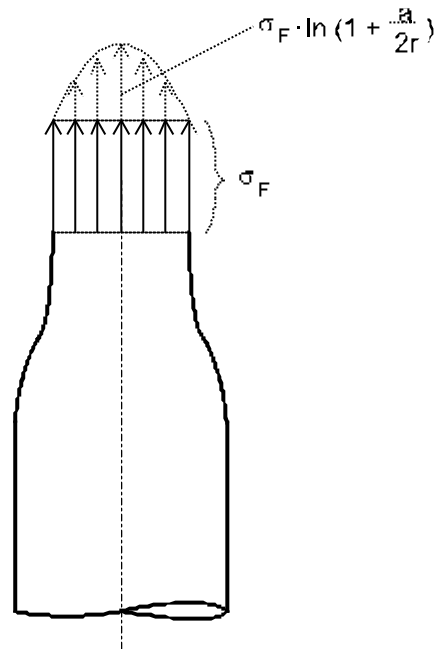
Ved å måle a og R kan flytespenningen σ_F beregnes fra σ_{middel} ved likningen

$$\mathbf{s}_F = \frac{\mathbf{s}_{\text{middel}}}{\left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)}$$

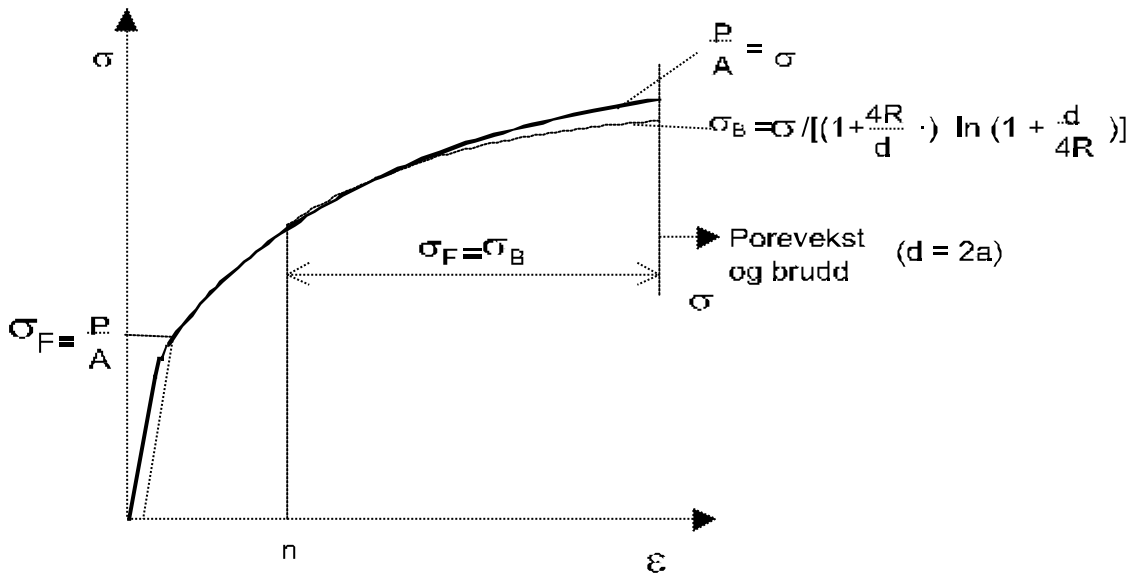
Uttrykket

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{2R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{2R} \right)}$$

betegnes *Bridgmans korreksjonsfaktor*. Ved hjelp av Bridgmans korreksjonsfaktor kan fastning og flytespenning for duktile metaller måles ved strekkforsøk helt til porevekst og brudd inntreer i innsnøringen. Ofte innebærer dette sann tøyning opp til $\epsilon=1 - 1.2$.



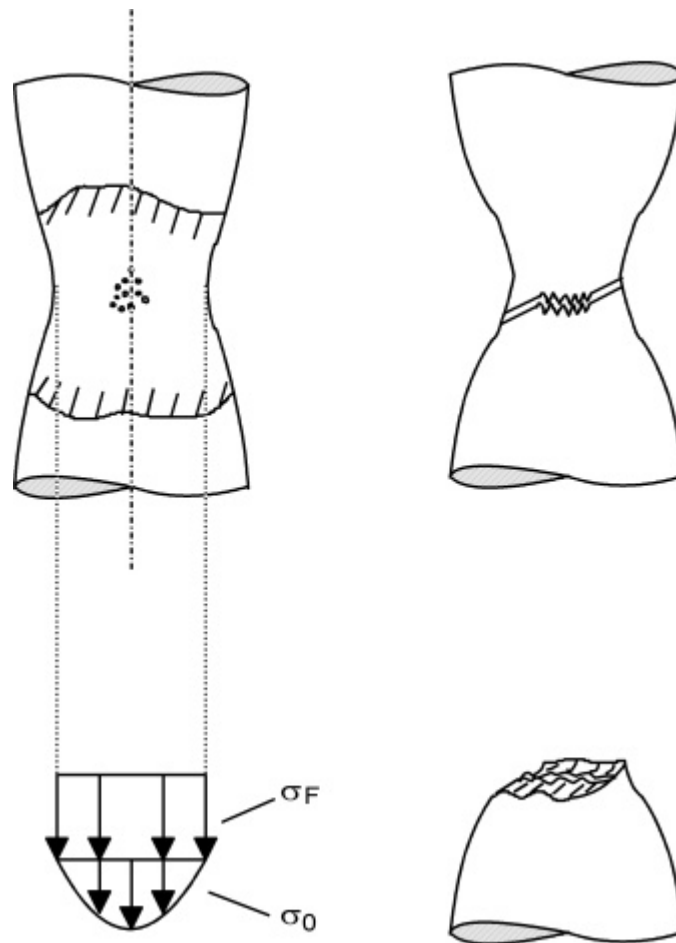
Figur 3-28 Fra ligning (3.20) har vi at $s_z = s_F + s_F \ln\left(1 + \frac{a^2 - r^2}{2Ra}\right)$.



Figur 3-29 Ved hjelp av Bridgmans korreksjonsfaktor kan fastning og flytespenning for duktile metaller måles ved strekkforsøk helt til porevekst og brudd inntreer i innsnøringen.

Porevekst inntreer først i sentrum av innsnøringen der den hydrostatiske (treaksede) strekkspenning σ_0 har sin høyeste verdi, se Figur 3-30. Porer begynner å vokse sammen, og

bruddet avsluttes ved at deformasjonen ytterligere lokaliseres i en skjærsoner ca. 45° til strekkaksen. Et skjærbrudd med skjærlepper oppstår.



Figur 3-30 Porevekst inntreer først i sentrum av innsnøringen der den hydrostatiske strekkspenningen σ_0 har sin høyeste verdi.

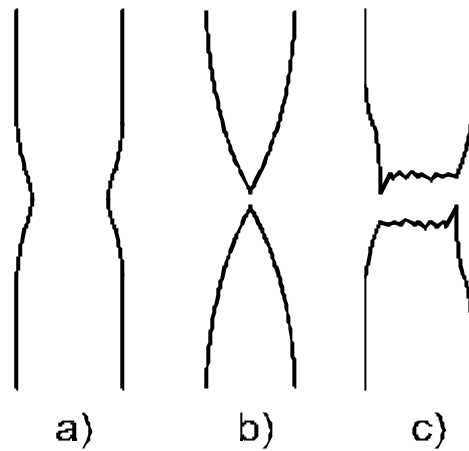
Karakteristika for seige brudd vil være:

- Skjærbrudd med glidning langs gitterplan med størst atomtetthet.
- Porevekst som starter fra inneslutninger.
- Betydelig plastisk deformasjon.
- Forplantning krever stor energitilførsel.
- Matt utseende på bruddflaten.

Ved belastning etter at flyting har inntruffet, vil prøvestavens tverrsnittsareal hele tiden avta, men dette kompenseres av fastningen som øker stavens bæreevne.

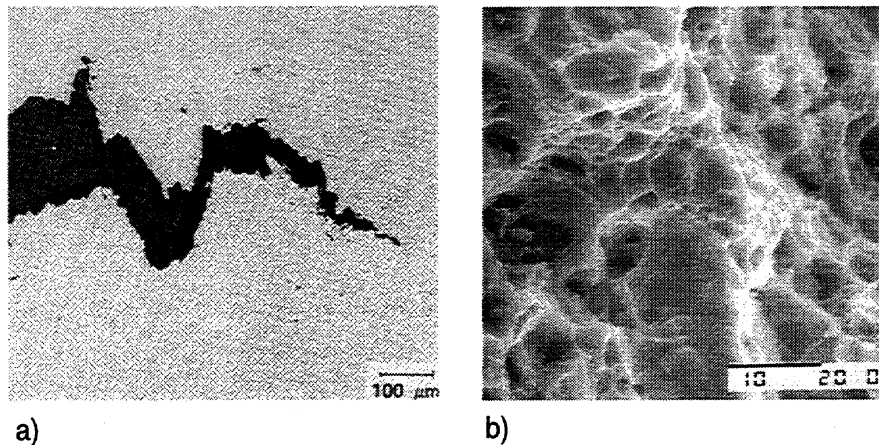
Ved lastmaksimum blir bæreevnen for liten i forhold til det reduserte tverrsnittsareal, og innsnøring begynner, Figur 3-31 a). Det absolutt duktile brudd i metaller vil arte seg ved innsnøring til null, Figur 3-31 b). Det vanlige forløp for stål er vist i Figur 3-31 c). Innsnøringen har hatt en dobbel ugunstig effekt, dels ved å gi lokal økning av den aksielle spenningen, men

mest ved å gi opphav til radielle normalspenninger som bidrar til et høyt hydrostatisk strekk nær stavaksen. Det typiske bruddforløp er derfor initiering av porer/sprekker i det indre av staven.



Figur 3-31 Innsnøring av en strekkstav.

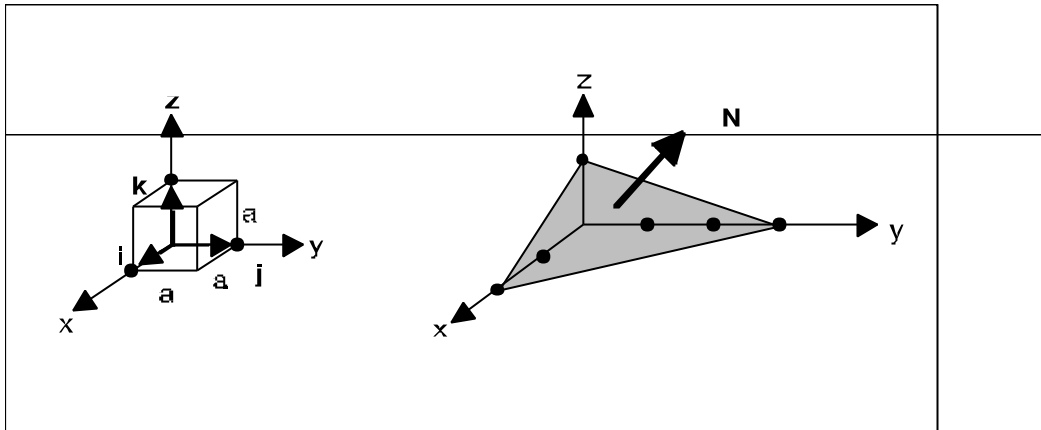
Porene dannes ut fra dekohesjon eller oppsprekking av ikke-metalliske inneslutninger, Figur 3-32. Bruddflatene får et karakteristisk utseende, et såkalt dimpel brudd, med inneslutninger i bunnen av porekraterene.



Figur 3-32 Duktilt brudd i stål. Porer dannet ut fra inneslutninger. a) Snitt normalt på sprekkplanet, b) bruddflate.

3.4 Krystallplastisitet.

For å kunne orientere seg i krystallgitteret er det utviklet et eget begrepsapparat. Et koordinatsystem legges i det kubiske gitteret som vist i Figur 3-33. "Enhetsvektorer" \mathbf{i} , \mathbf{j} og \mathbf{k} med lengde lik gitterparameter a orienteres i h.h.v. x -, y - og z -retning som vist i Figur 3-33.



Figur 3-33 Et koordinatsystem legges i et kubisk gitter. Planet p med enhetsnormal \mathbf{N} skjærer aksene i verdiene $x=2$, $y=3$ og $z=1$.

Et plan p avskjærer koordinataksene

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ 2 & 3 & 1 \end{array}$$

der tallene står for antall gitterkonstantlengder. De inverse verdier av avskjæringene er h.h.v.

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{1}$$

Multipliser med produktet av nevnerne, $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$, det gir h.h.v.

$$3 \quad 2 \quad 6$$

Miller-indeksene for planet defineres, og skrives som:

$$(3 \quad 2 \quad 6)$$

Betegn vektorene fra origo til avskjæringspunktene for h.h.v.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_x &= n\mathbf{i} = 2\mathbf{i} \\ \mathbf{V}_y &= m\mathbf{j} = 3\mathbf{j} \\ \mathbf{V}_z &= l\mathbf{k} = 1\mathbf{k} \end{aligned}$$

Vektoren \mathbf{N} som står normalt på planet p er gitt ved

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}_x \times \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_y \times \mathbf{V}_z + \mathbf{V}_z \times \mathbf{V}_x = m\mathbf{i} + l\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

Dvs for spesialtilfellet med planet (3 2 6)

$$\mathbf{N} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

der en ser at komponentene til vektoren \mathbf{N} , dvs en normal til planet, tilsvarer Miller-indeksene for planet, m.a.o. et krystallografisk plan identifiseres med planets normal.

Generelt har en altså avskjæringene som betegnes:

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ n & m & l \end{array}$$

Den inverse (resiproke) verdien blir:

$$\frac{1}{n} \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{l}$$

Multipliser med n·m·l:

$$\cdot m \cdot l \quad n \cdot l \quad n \cdot m$$

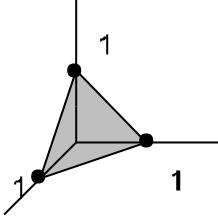
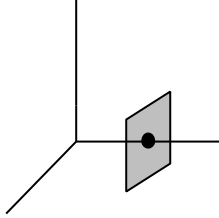
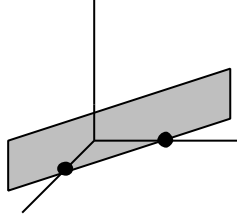
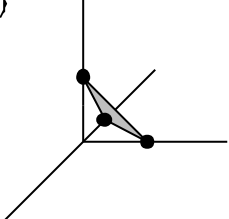
og redusèr så til settet av de lavest mulige hele tall. Miller indeks for planet blir altså generelt:

$$(\cdot m \cdot l \quad n \cdot l \quad n \cdot m)$$

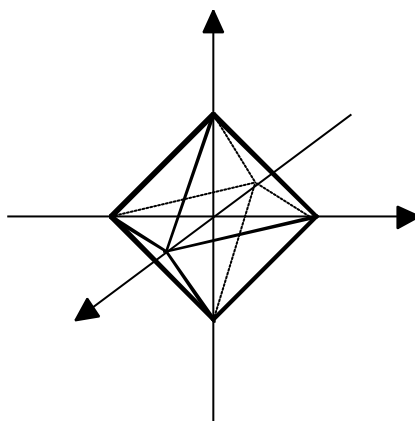
og så redusert til settet av de lavest mulige hele tall.

Figur 3-34 viser eksempler på plan som det stadig blir referert til.

En negativ avskjæring gir negativ Millerindeks. Den betegnes som vist i eksempel d) med $\bar{1}$. Planene a) og d) tilhører en "familie" av likeverdige plan, Figur 3-35. En slik familie av plan betegnes $\{111\}$.

Eksempler: Millers indekser for plan	$\frac{x}{n} \mid \frac{y}{m} \mid \frac{z}{l}$	$\frac{1}{n} \quad \frac{1}{m} \quad \frac{1}{l}$	()
(a) 	1 1 1	1 1 1	(1 1 1)
(b) 	∞ 1 ∞	0 1 0	(0 1 0)
(c) 	1 1 ∞	1 1 0	(1 1 0)
(d) 	-1 1 1	-1 1 1	$(\bar{1} 1 1)$

Figur 3-34 Eksempler på Millers indekser for plan.



Figur 3-35 Familie av plan {1 1 1}.

En retning i det kubiske krystallgitter er angitt av komponentene til den vektor som peker i retningen. Komponentene er den lavest mulige kombinasjon av hele tall.

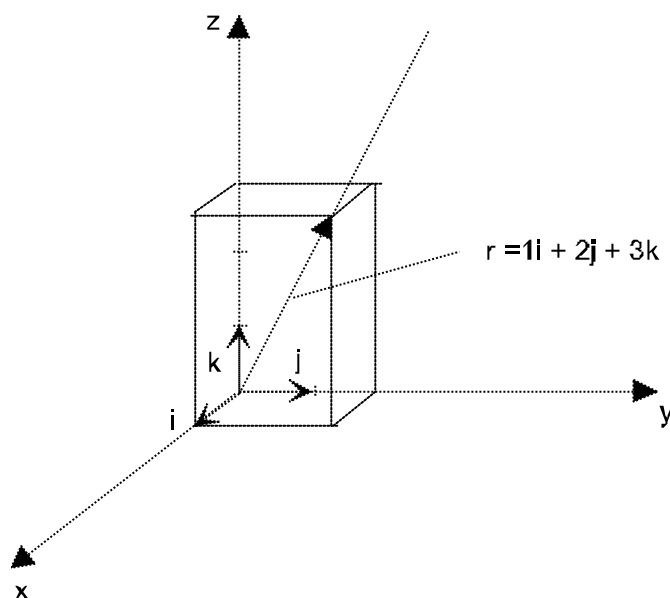
$$\mathbf{r} = n \cdot \mathbf{i} + m \cdot \mathbf{j} + l \cdot \mathbf{k}$$

Den spesielle retning som er angitt i Figur 3-36 betegnes

$$[1 \ 2 \ 3]$$

En familie av likeverdige retninger

$$\langle 1 \ 2 \ 3 \rangle$$



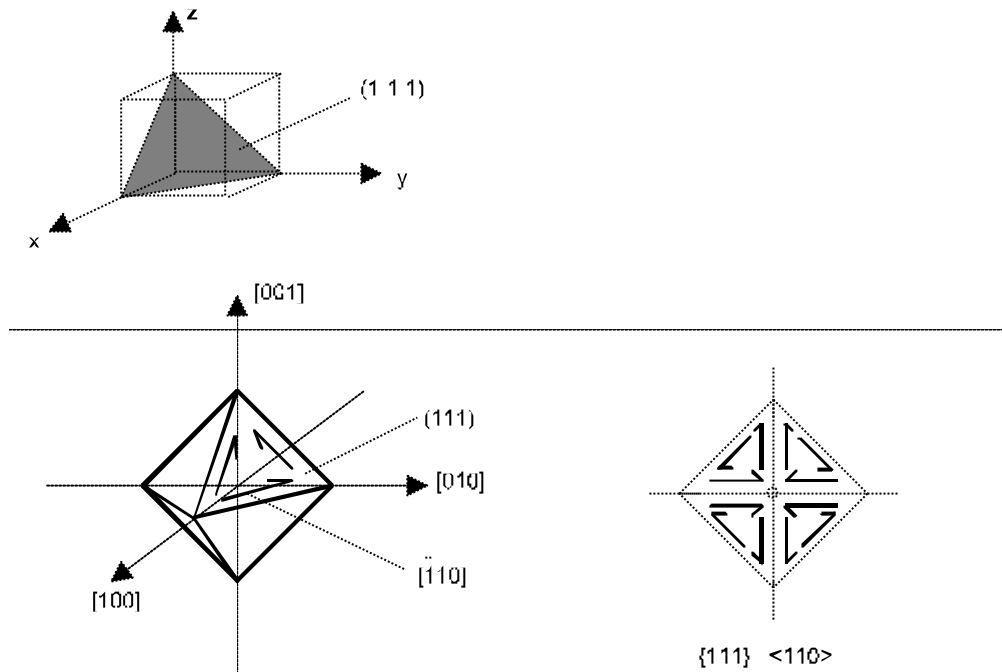
Figur 3-36 En spesiell retning r skrives som med hakeparentes: [1 2 3].

3.4.1 Glideplan og glideretning.

Ved plastisk deformasjon av krystaller på atomnivå er det observert at glidningen foregår langs bestemte retninger og på bestemte plan. Dette er gjerne langs plan og i retninger der atomene ligger tett sammen. I f.eks. kubisk flatesentrert struktur (fcc) er de *tettest pakkede*

atomplan familien $\{111\}$. I disse plan er *retninger med kortest avstand mellom atomrekker* familien $\langle 110 \rangle$. Observasjoner viser at plastisk glidning (deformasjon) skjer i dette glidesystemet for fcc-krystaller. Et slikt system beskrives ved Miller-indeksene

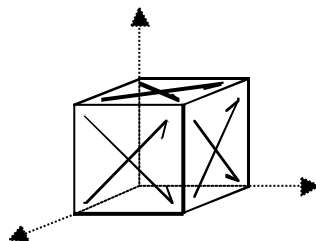
$$\{1\ 1\ 1\} \langle 1\ 1\ 0 \rangle$$



Figur 3-37 Glidesystem $\{1\ 1\ 1\} \langle 1\ 1\ 0 \rangle$ for fcc-struktur (Aluminium, Kopper, Austenittiske stål).

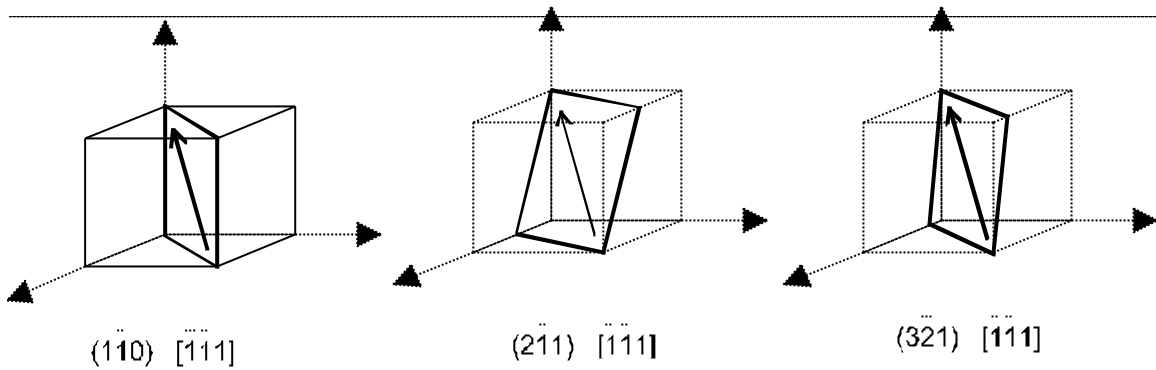
Som en ser av Figur 3-37, består glidesystemet av 4 glideplan med 3 glideretninger på hvert plan (eller 6 retninger dersom + og - retning tas med). Det er altså 12 glidemuligheter (3·4) i en fcc-struktur. (Eller 24 dersom en tar hensyn til + og - retning).

For aluminium ved temperatur over 450°C vil også glidesystemet $\{100\} \langle 011 \rangle$ kunne operere, Figur 3-38. Varmforming av aluminium, f.eks. ekstrudering, foregår over 450°C .



Figur 3-38 Glidesystem $\{1\ 0\ 0\} \langle 0\ 1\ 1 \rangle$. Dette er et aktuelt deformasjonssystem for aluminium ved temperatur over 450°C .

For kubisk romsentrert struktur (som $\alpha\text{-Fe}$) kan glidning foregå på mange plan som inneholder $\langle 111 \rangle$ glideretning. Figur 3-39 viser tre av disse glidesystemene, nemlig $\{101\} \langle 111 \rangle$, $\{112\} \langle 111 \rangle$, $\{123\} \langle 111 \rangle$.



Figur 3-39 Glidesystemet for ferittisk stål.

Eksempel 3-3:

Vis at planet (211) avskjærer koordinataksene i $n = 1$, $m = 2$, $l = 2$, og planet (321) avskjærer koordinataksene i $n = 2$, $m = 3$, $l = 6$.

Retninger og plan i tettpakket heksagonal struktur spesifiseres ved hjelp av fire indekser. Disse er basert på 3 akser i grunnplanet (basalplanet) med akser a_1 , a_2 , og a_3 , og retning normalt til grunnplanet c , Figur 3-40. Avskjæringene betegnes n , k , i og l , og retningen er gitt av vektoren

$$\mathbf{n} = h \cdot \mathbf{a}_1 + k \cdot \mathbf{a}_2 + i \cdot \mathbf{a}_3 + l \cdot \mathbf{c}$$

der \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , \mathbf{a}_3 , og \mathbf{c} er vektorer i de angitte retningene. h , k , i og l er den laveste kombinasjonen av heltall som kan finnes for den angitte orientering.

Det er en sammenheng mellom størrelsene i basalplanet

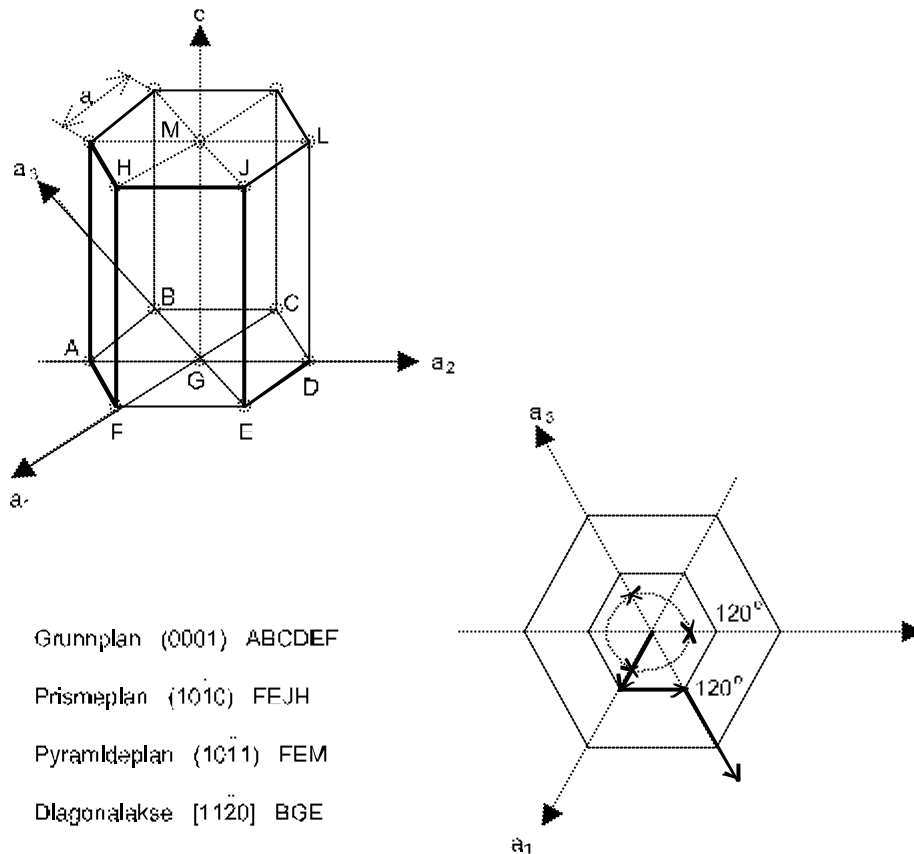
$$\mathbf{a}_3 = -(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$$

$$i = -(h + k)$$

derfor trengs det kun to ortogonale vektorer og to lengder for å definere orienteringen i dette planet. Glidesystemene for metaller med heksagonal-struktur er

$$\{0 \ 0 \ 0 \ 1\} \langle 1 \ 1 \ 2 \ 0 \rangle$$

altså i basal- eller grunnplanet med retning langs diagonalaksene.



Figur 3-40 Heksagonal struktur.

3.4.2 Schmid's "lov" for krystallplastisitet

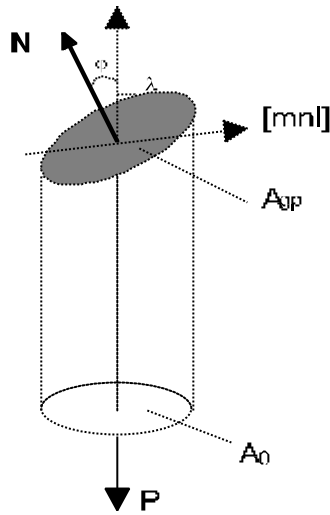
Betingelsen for at glidning skal skje i et gitt plan og i en gitt retning er gitt av Schmid's "lov":

Glidning i et gitt glideplan og en gitt glideretning vil skje dersom skjærspenningen i dette planet og i den angitte retning τ_{RSS} (resolved shear stress, dvs. dekomponert skjærspenning) når en kritisk verdi τ_{CRSS} (critical resolved shear stress). Denne kritiske verdien er uavhengig av normalspenningen på planet.

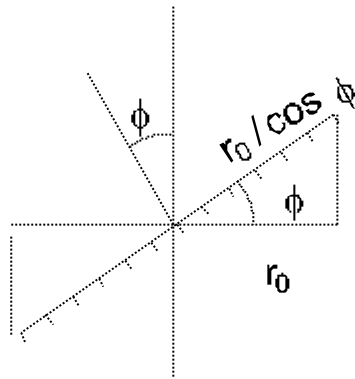
Betrakt en strekkprøve av et ènkrystall, Figur 3-41. Det operative glidesystem, dvs et glideplan og en glideretning, er orientert slik at ϕ er vinkelen mellom normalen \mathbf{N} til planet og strekkretningen mens λ er vinkelen mellom glideretning og strekkretning. Dersom τ_{CRSS} er gitt for det operative glidesystem, hva blir da "flytespenningen" σ_f gitt ved

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A_0}$$

der A_0 er tverrsnittsarealet av prøven og P_f er strekkraft ved flytning.



Figur 3-41 Beregning av flytespenning til et enkrystall.



$$A_g = \pi r_0 \cdot \frac{r_0}{\cos \phi} = \frac{A_0}{\cos \phi}$$

Figur 3-42 Arealberegning.

Arealet til glideplanet beregnes som vist i Figur 3-42

$$A_{gp} = \frac{A_0}{\cos f}$$

Lasten P 's komponent i glideretningen dekomponeres som vist i Figur 3-43

$$P = P \cos l$$

Flytning skjer når $P = P_f$ og

$$A_{gp} \frac{t_{CRSS}}{\cos l} = A_o \frac{t_{CRSS}}{\cos f \cos l}$$

som gir "flytespenning"

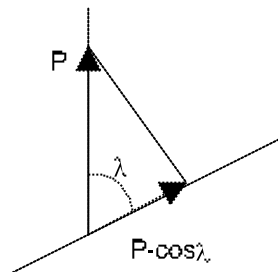
$$s_f = \frac{P_f}{A_o} = \frac{t_{CRSS}}{\cos f \cos l} \tag{3.21}$$

Legg merke til at glideretningen λ bare kan variere innenfor området

$$0 \leq l \leq \frac{p}{2} - f$$

når f varierer innenfor området

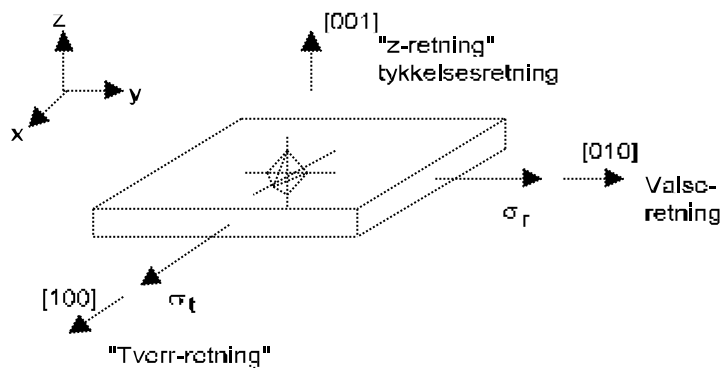
$$0 \leq f \leq \frac{p}{2}$$



Figur 3-43 Dekomponering av lasten P.

3.4.3 Flyteflater. Tekstur. Anisotropi

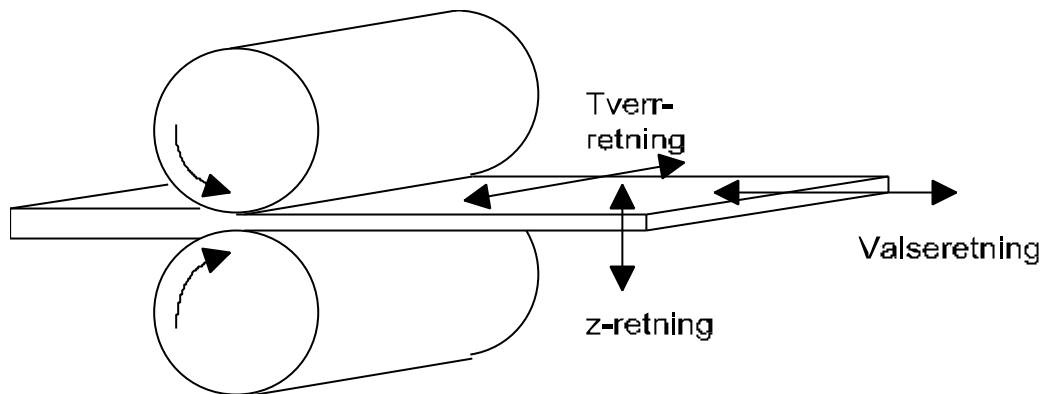
Betrakt en plate av et polykrystallinsk fcc-materiale der alle korn tenkes å ha samme orientering som antydnet på Figur 3-44. Dette kalles en ideell (100)[100] tekstur¹. En tenker seg en valset plate der det har utviklet seg en foretrukket krystallorientering av de enkelte korn (tekstur).



Figur 3-44 Plan spenning, ideell (1 0 0)[1 0 0]-tekstur.

¹ Se Backofen, W.: "Deformation Processing", Addison-Wesley 1972 for en detaljert behandling av dette avsnittet.

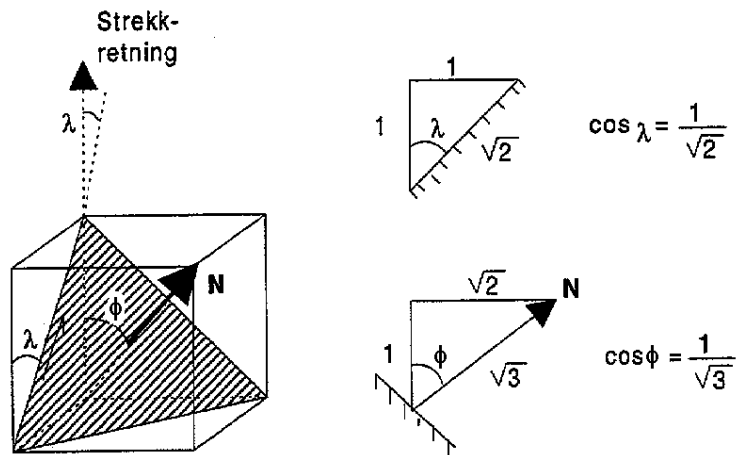
Teksturen måles relativt valseretningen, se Figur 3-45. Egenskaper som flytespenning, duktilitet og bruddseighet kan ha betydelig retningsavhengighet i forhold til valseretningen. Materialet er anisotrop. Noen av disse anisotrope egenskapene skyldes krystallografisk tekstur som sees på her. Andre anisotropiegenskaper skyldes preferert orientering av geometrisk form til partikler og korn.



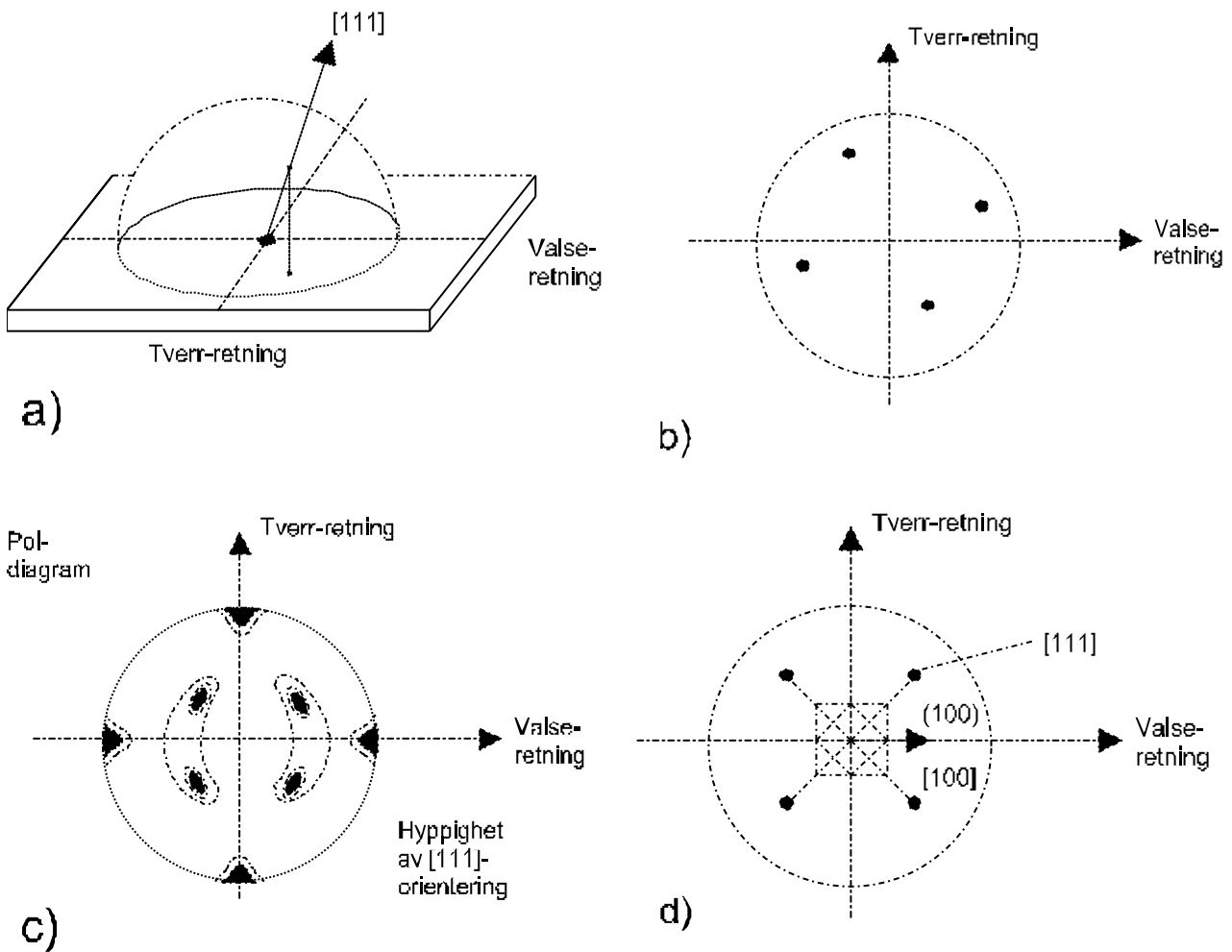
Figur 3-45 I valsede plater kan egenskaper som flytespenning, duktilitet og bruddseighet ha betydelig retningsavhengighet i forhold til valseretningen.

Den krystallografiske tekstur kan måles ved hjelp av røntgendiffraksjonsmålinger. F.eks. kan orienteringen av $[111]$ -retningene for hvert korn registreres og plottes inn i et "poldiagram" som vist på Figur 3-46. For et bestemt korn som registreres bestemmes skjæringspunktet mellom retningene $\langle 111 \rangle$ og en halvkule med sentrum i målepunktet, Figur 3-46 a). Punktene projiseres ned på et plan parallelt med platen og de 4 skjæringspunkter for familien $[111]$ registreres, Figur 3-46 b). Ved å registrere orienteringen for tilstrekkelig mange korn kan kurver for hyppighet av orientering registreres, Figur 3-46 c). Dette er et typisk poldiagram for en aluminium-plate.

Vi skal nå benytte Schmid's "lov" til å beregne flytegrensen for en plate belastet i plan spenning, σ_r og σ_t , Figur 3-44, under antakelse av en ideell $(100)[100]$ -tekstur. Det betyr at alle kornene har orientert $\{100\}$ -planene normalt til valseretning, tverretning og tykkelsesretning. Dette vil ikke kunne oppnås i praksis, men vil illustrere hvordan en kan beregne makroegenskaper fra en mikromekanisme. Figur 3-46 d) viser poldiagram for en ideell $(100)[100]$ -tekstur.



Figur 3-47 Definisjon av vinklene ϕ og λ for beregning av flyteflate.



Figur 3-46 Typisk poldiagram for en aluminium-plate.

For dette idealiserte tilfellet kan flyteflaten beregnes fra Schmid's lov; ligning (3.21), på følgende måte. Fra Figur 3-47 har en vinklene ϕ og λ gitt ved

$$\cos f = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cos l = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En kan skille mellom 3 grupper glidesystem i platen, Figur 3-48:

I: Dette system blir bare belastet av σ_t , og flytning skjer når

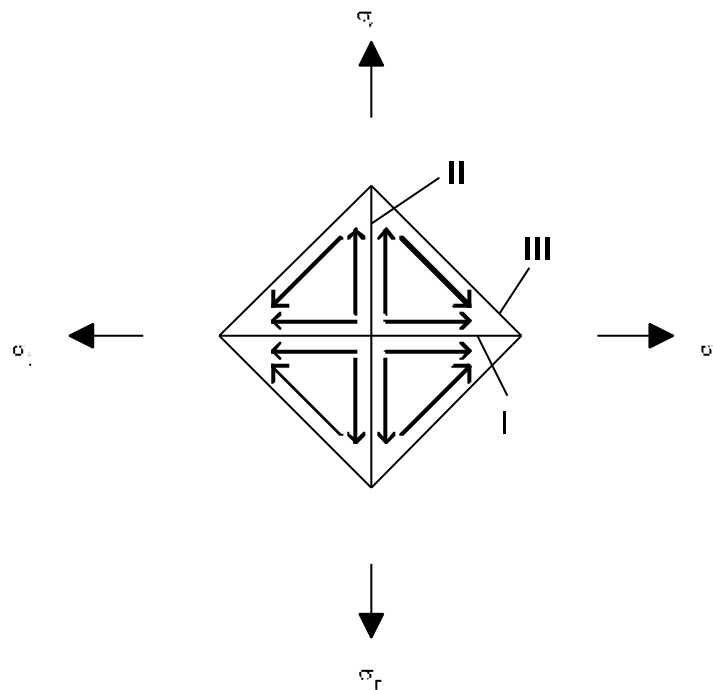
$$s_{max} - s_{min} = s_t - s_z = s_t = s_f = \frac{t_{CRSS}}{\cos f \cos l} = \sqrt{6} t_{CRSS}$$

II: Dette systemet blir bare belastet av σ_r , og flytning skjer når

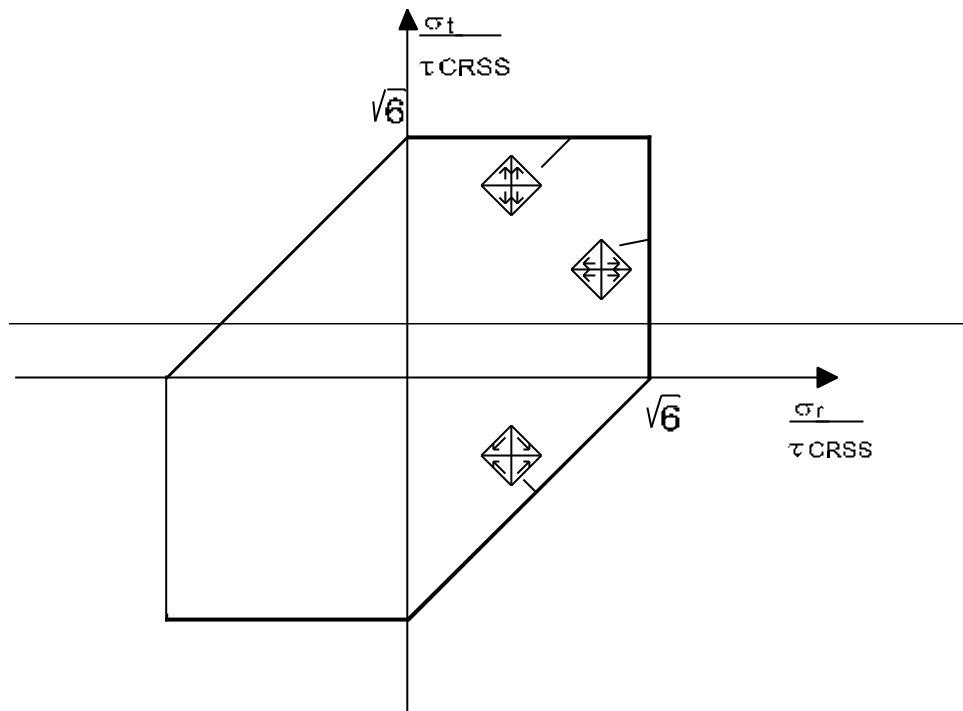
$$s_{max} - s_{min} = s_r - s_z = s_r = s_f = \frac{t_{CRSS}}{\cos f \cos l} = \sqrt{6} t_{CRSS}$$

III: Dette systemet blir belastet både av σ_r og σ_t , men de virker i motsatt retning:

$$s_{max} - s_{min} = s_r - s_t = s_f = \frac{t_{CRSS}}{\cos f \cos l} = \sqrt{6} t_{CRSS}$$



Figur 3-48 En kan skille mellom de 3 glidegruppene I, II og III i en plate.



Figur 3-49 De tre gruppene glidesystemene for en enkrytall i Figur 3-48 gir oss en Tresca flyteflate i spenningsrommet.

På Figur 3-49 er linjene for de spenningskombinasjoner av σ_x og σ_y som gir begynnende plastisk flyt i platen inntegnet i "spenningsplanet". De operative glidesystemene for de forskjellige segmenter av kurven er også vist. En gjenkjenner denne som Trescas flyteflate fra mekanikken.

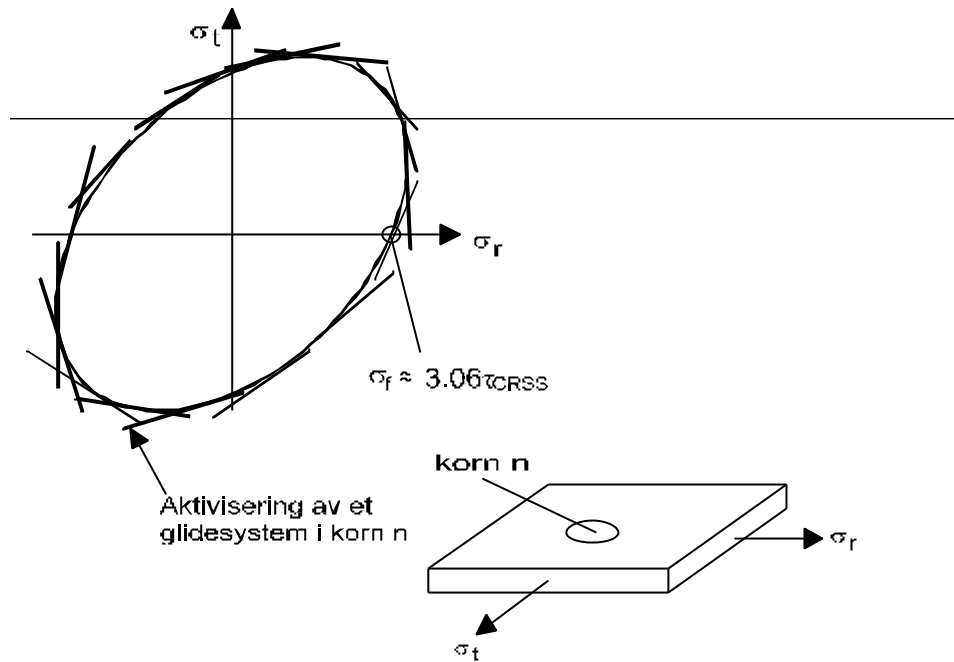
På en forenklet men konsistent måte har vi nå beregnet en makroegenskap ut fra en mikromekanisk modellering. Utviklingen av materialteknologien i årene fremover vil i stor grad bli preget av en slik mikromekanisk modellering der en med bruk av datamaskiner kan beregne materialoppførsel kvantitativt ut fra observerte mikromekanismer.

Gjennom anvendelse av Schmidts "lov" har vi beregnet at den makroskopiske flytespenning ved enakset strekk ($\sigma_t = 0$) er gitt ved

$$s_f = \sqrt{6} t_{CRSS} = 2.45 t_{CRSS}$$

der τ_{CRSS} er bestemt av glidemotstand på de enkelte krystallplan.

I et reelt tilfelle for en polykrystallinsk plate vil ikke situasjonen være så enkel. Da vil gunstig orienterte glidesystemer i forskjellige korn aktiveres under alle kombinasjoner av σ_x og σ_y . I stedet for de få linjene på Figur 3-49 fås en skare med linjer. Disse linjene omhyller en kurve (flate), Figur 3-50. Denne flyteflaten blir uten "hjørner" og minner om Mises flyteflate fra plastisitetsteorien.



Figur 3-50 Flyteflate for et polykrystall.

Dersom kornene hadde en tilfeldig orientering, dvs. en jevn fordeling uten konsentrasjon av retninger i poldiagrammet, kan det vises med beregninger basert på Schmid's lov at flytespenningen ved enakset strekk ($\sigma_t = 0$, Figur 3-50) blir

$$s = M t_{CRSS} = 3.06 t_{CRSS}$$

der M blir kalt Schmid- eller Taylor-faktor. Taylor var den første som utførte slike beregninger. (G. I. Taylor, J. Inst. Metals 62, 307 (1938)).

Eksempel 3-4:

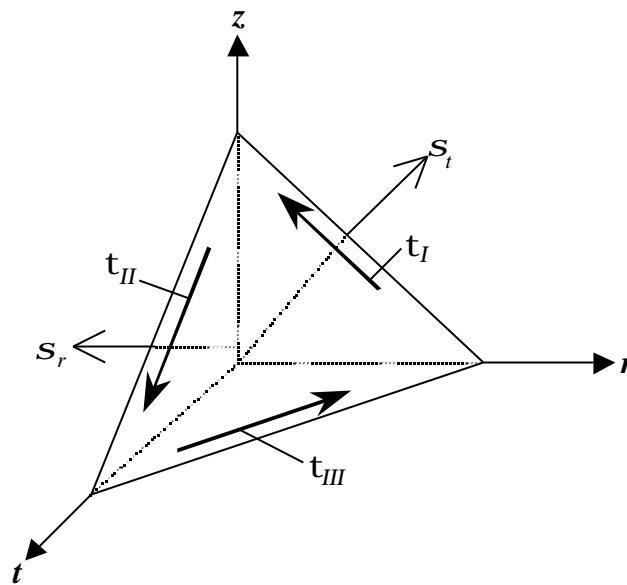
En plate (av et fcc-metall) med ideell (100)[100] tekstur med $\tau_{CRSS}=30$ MPa, belastes slik at forholdet mellom σ_r og σ_t er konstant med $\sigma_t = 0.5 \sigma_r$, se Figur 3-44. Beregn verdien av σ_r når flytning inntreffer.

Ved likevektbetingelser i hhv. τ_I , τ_{II} og τ_{III} retninger, se

Figur 3-51, fåes:

- $\tau_I = \sigma_r \cos \lambda \cos \phi$
- $\tau_{II} = \sigma_t \cos \lambda \cos \phi$
- $\tau_{III} = \sigma_r \cos \lambda \cos \phi - \sigma_t \cos \lambda \cos \phi$

Gliding foregår i den retningen med maksimal skjærspenning, dvs. i glideretning I. Innsatt $\cos \lambda = 1/\sqrt{2}$, $\cos \phi = 1/\sqrt{3}$ og $\tau_{CRSS} = 30$ MPa i ligning τ_I ovenfor blir $\sigma_r = 73$ MPa.



Figur 3-51 Likevekt i et krystall.

3.5 Styrkemekanismer

3.5.1 Fra dislokasjonsbevegelse til plastisk tøyning

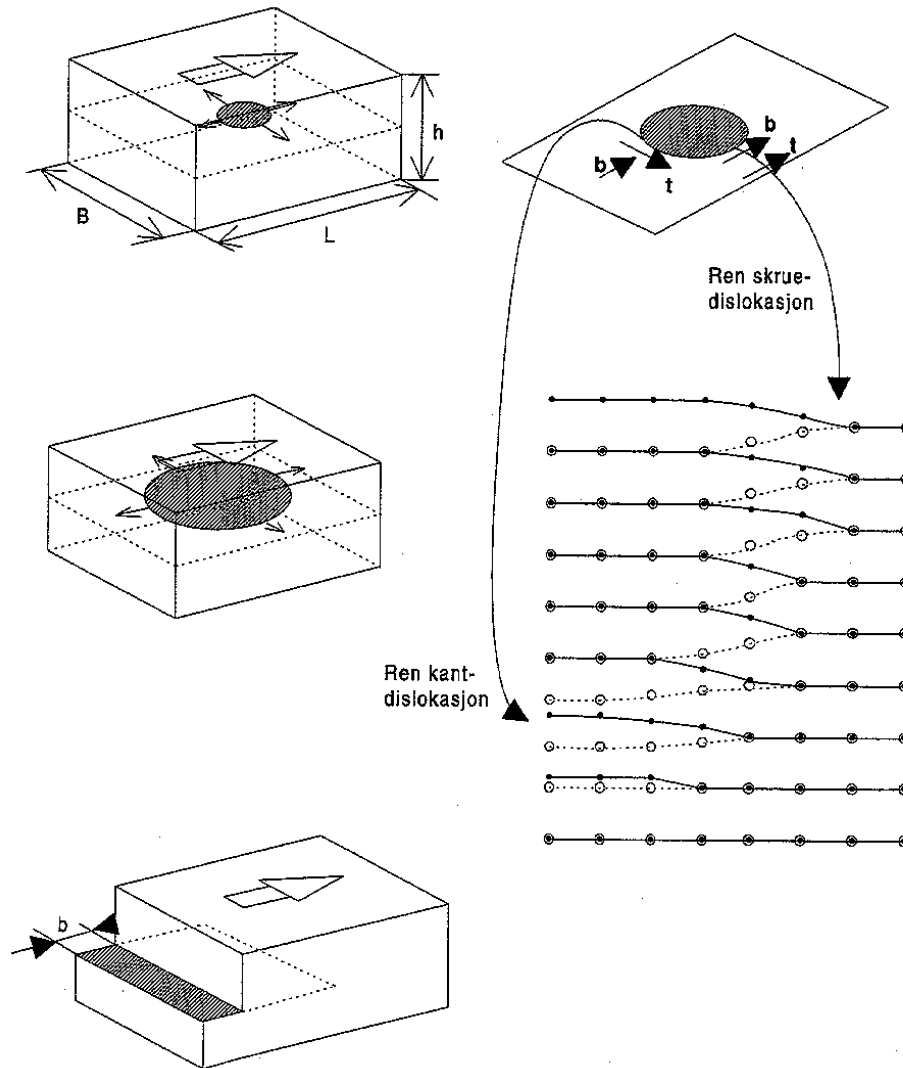
Dislokasjonene er tidligere blitt presentert i Materialteknologi I. Vi skal nå se på sammenhengen mellom bevegelse av dislokasjonene fra den ytre belastningen og den plastiske deformasjonen dette resulterer i.

Figur 3-52 viser en dislokasjonsring, dvs. en kombinasjon av skrue- og kantdislokasjon. Overgangen fra skrue- til kantdislokasjon er vist i detalj for atomlaget under glideplanet (åpne sirkler) og for atomlaget over glideplanet. Når en skjærspenning, τ_{CRSS} , virker i glideplanet, på tvers av kantdislokasjonen og parallelt med skruedislokasjonen, vil dislokasjonsringen ekspandere og gi en forflytning av øvre del av krystallet relativt nedre del lik lengden av Burgers vektor. Det *plastiske* tøyningssinkrementet som krystallet er blitt deformert av ved at en dislokasjonsring har passert gjennom krystallet er

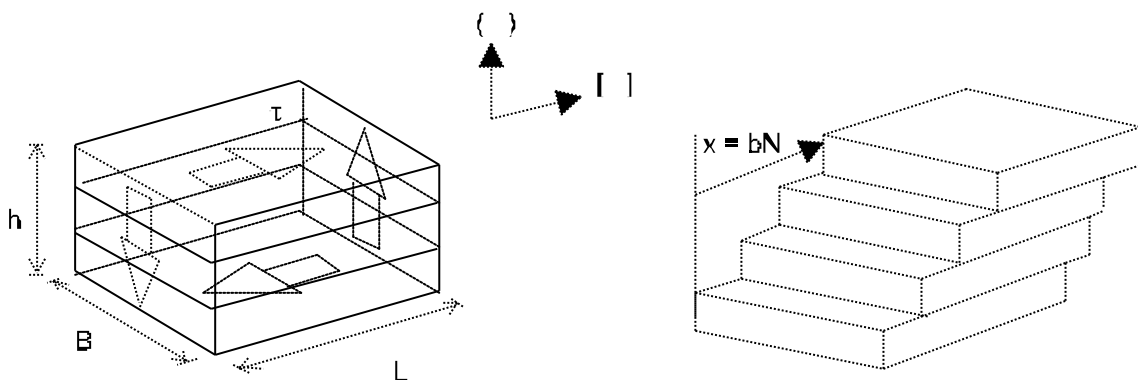
$$dg = \frac{b}{h}$$

Lengden av den dislokasjonen som har forårsaket dette tøyningssinkrementet er

$$2(B + L)$$



Figur 3-52 En dislokasjonsring er en kombinasjon av skrue- og kantdislokasjon.



Figur 3-53 Et krystall hvor deformasjonen skjer i et glidesystem.

Betrakt en krystall, Figur 3-53, der deformasjon skjer i et glidesystem. N dislokasjoner har beveget seg gjennom krystallet på flere parallelle plan. Det gir da en plastisk skjærtøyning

$$dg = \frac{x}{h} = \frac{Nb}{h}$$

Den totale lengde av dislokasjoner som har passert gjennom krystallet er

$$2N(B + L)$$

Volumet av krystaller er $B \cdot L \cdot h$. Dersom krystallet er et korn eller et subkorn i et polykrystall, er økning i *dislokasjonstetthet* pga. denne deformasjonen lik

$$r_d = \frac{\sum \text{dislokasjonslengde}}{\text{volum}} = \frac{2N(B + L)}{BLh}$$

En relativt finkornet struktur med $h=B=L=30\mu\text{m}$ og Burgers vektor lik 0.286 nm (aluminium) vil med $\gamma=0.01$ gi

$$N = g \frac{h}{b} = 0.01 \frac{30 \cdot 10^{-6}}{0.286 \cdot 10^{-9}} = 1050$$

dvs. en dislokasjonstetthet på

$$r_d = \frac{1050 \cdot 2(B + L)}{BLh} = \frac{1050 \cdot 120 \cdot 10^{-6}}{27000 \cdot 10^{-18}} = 4.7 \cdot 10^{12} \text{ [m / m}^3\text{]}$$

Et utglødd metall har en dislokasjonstetthet på

$$r_d \approx 10^{10} \text{ [m / m}^3\text{]}$$

mens et sterkt kalddeformert krystall har dislokasjonstetthet

$$r_d \approx 10^{16} \text{ [m / m}^3\text{]}$$

Antall dislokasjoner i "vårt" korn er for glødet materiale:

$$N = r_d \frac{BLh}{2(B + L)} = 2.25 \text{ dislokasjoner}$$

og for kalddeformert materiale:

$$N = 10^{16} \cdot 2.25 \cdot 10^{-12} = 225 \cdot 10^4 = 2.25 \cdot 10^6 \text{ dislokasjoner}$$

Likningen for energi (elastisk) per lengdeenhet av dislokasjonen var for en skruedislokasjon

$$E_{ds} = \frac{Gb^2}{4\mu} \ln \frac{r_1}{r_0}$$

og for en kantdislokasjon

$$E_{dk} = \frac{Gb^2}{4\nu(1-\nu)} \ln \frac{r_1}{r_0}$$

Med $r_1 \approx 15 \mu\text{m}$ og $r_0 = 2 \cdot b = 2 \cdot 0.287 \text{ nm}$ fås

$$E_{ds} = 0.8Gb^2$$

$$E_{dk} = 1.2Gb^2$$

Ofte benyttes den forenklete relasjonen

$$E_d = \alpha Gb^2$$

der $\alpha=0.5$ for en skruedislokasjon og $\alpha=1.0$ for en kantdislokasjon ved overslagsberegninger.

3.5.2 Deformasjonsfastning

Dersom flere glidesystem aktiveres ved deformasjon av enkrystallet vil dislokasjoner krysse hverandre; de hindres i hverandres bevegelse, det dannes jogs. Dersom midlere avstand mellom dislokasjoner i en orientering er l , så vil dislokasjonstettheten være

$$\mathbf{r}_d \sim \frac{1}{l^2}$$

Den nødvendige spenning for å skjære gjennom dislokasjonene er proporsjonal med

$$\mathbf{t}_{flyt} - \mathbf{t}_{CRSS} = \frac{\alpha Gb}{R} \cong \frac{\alpha Gb}{l} \propto Gb\sqrt{\mathbf{r}_d}$$

som ut fra sammenhengen mellom plastisk tøyning og dislokasjonstetthet i avsnitt 3.5.1:

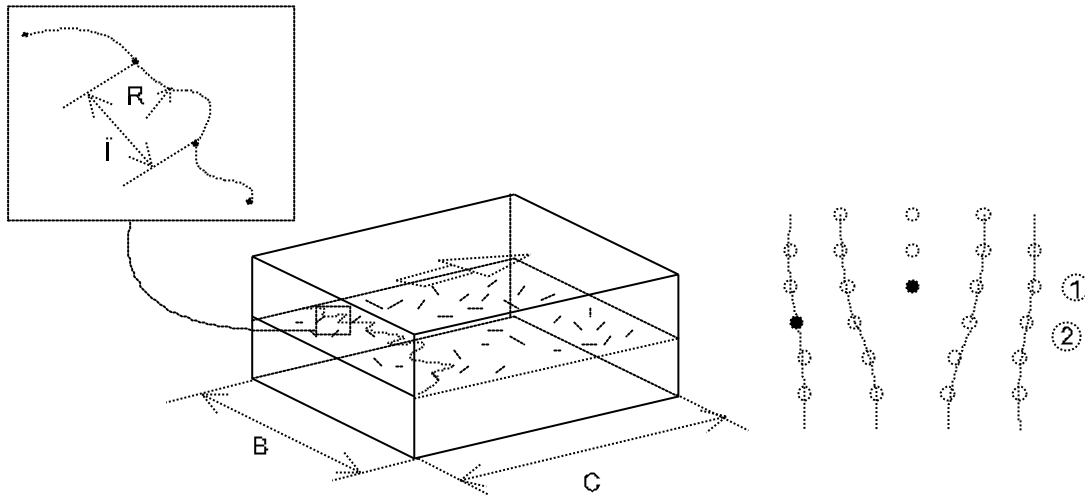
$$\mathbf{g} = \mathbf{r}_d \frac{BL}{2(B+L)} b = \mathbf{r}_d \frac{d}{4} b$$

hvor $d=L=B$ =kornstørrelse, gir

$$\tau_{flyt} - \tau_{CRSS} \propto G\sqrt{\frac{b\gamma}{d}}$$

3.5.3 Innvirkning av atomer i løsning på flytmotstanden

Atomer i løsning i et krystall vil gi forstyrrelser av posisjonen til atomene rundt det enkelte atom i løsning. Dette vil føre til at det blir vanskeligere for dislokasjonene å passere disse områdene, Figur 3-54.



Figur 3-54 Atomer i løsning vil gjøre det vanskeligere for dislokasjonene å passere.

Volumfraksjon atomer i løsning kan uttrykkes som

$$c \sim \left(\frac{b}{l}\right)^2$$

eller

$$l \sim \frac{b}{\sqrt{c}}$$

Økning av glidemotstand pga at dislokasjonene "henger seg opp i" atomer i løsning er

$$t - t_{CRSS} = a \frac{Gb}{R}$$

Settes nå krumningen R proporsjonal med l , dvs en konstant kraft for å trekke dislokasjonene forbi atomet, så fås:

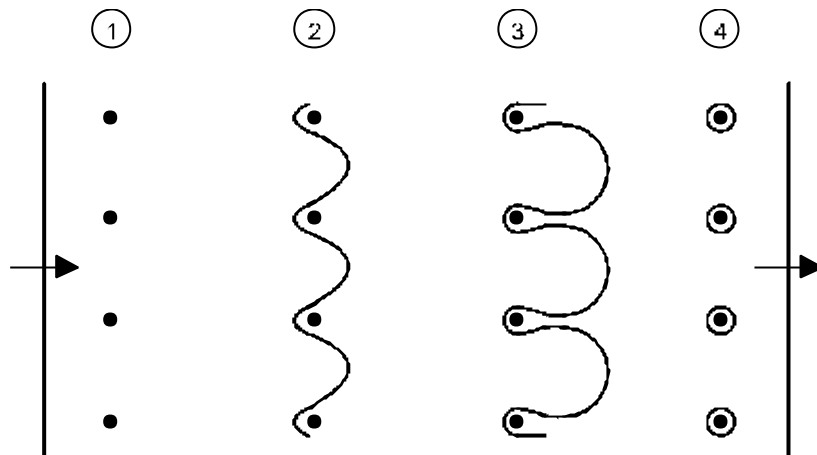
$$t - t_{CRSS} = a \frac{Gb}{R} \propto \frac{Gb}{l} \approx G\sqrt{c}$$

dvs. at styrkeøkningen pga atomer i løsning er proporsjonal med kvadratroten av volumfraksjon atomer i løsning.

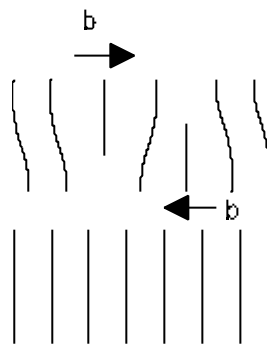
3.5.4 Innvirkning av harde, små partikler på flytmotstanden (partikkeldiameter 5-500 nm)

En tenker seg her at dislokasjonene passerer partiklene som vist på Figur 3-55. Dislokasjonen beveger seg i et glidesystem og møter en rad med partikler med diameter r og midlere avstand fra hverandre. (1) Dislokasjonen "henger fast" i partiklene og bøyes ut (2) inntil krumningen på utbøyningen er $R = l/2$, (3). Da vil dislokasjonene på hver side av partikkelen tangere hverandre. I tangeringspunktet vil det være to dislokasjoner med motsatt

Burger-vektor som møtes, og der smelte sammen og dele dislokasjonen i to, Figur 3-56. Det vil da dannes en dislokasjonsring rundt partikkelen, samtidig som dislokasjonen rettes ut og "sveiper" videre (4).



Figur 3-55 En dislokasjon som passerer noen harde, små partikler.



Figur 3-56 "Sammensmelting" av dislokasjoner med motsatt Burger-vektor.

Det kan vises at den nødvendige skjærspenningen som må virke på glideplanet for å krumme dislokasjonen tilstrekkelig til å komme forbi partikkelene kan uttrykkes som:

$$\tau b \bar{l} = \frac{Gb^2}{2\mu} \ln \frac{r}{b}$$

hvor $\tau = \tau_F - \tau_{CRSS}$ er økningen av flytmotstanden og r er partikkelradius. Energi av dislokasjon som bøyes rundt partikkelen er begrenset av partikkeldiameter. Volumfraksjon partikler blir

$$f = \frac{\rho r^2}{\bar{l}^2}$$

eller

$$\bar{l} \cong \frac{2r}{\sqrt{f}}$$

som innsatt gir

$$t = \frac{Gb}{4pr} \sqrt{f} \ln \frac{r}{b}$$

der r er radius til den herdende partikkel.

Eksempel 3-5:

Et mikrolegert stål har niobnitrid utfelt i ferritt: volumfraksjon av partikler $f = 0.001$, partikkelradius=2nm og $G=84\text{GPa}$ for stål. Anslå økning av skjærflytmotstanden.

$$t = \frac{84000 \cdot 0.25 \cdot 10^{-9}}{4p \cdot 2 \cdot 10^{-9}} \sqrt{0.001} \ln \frac{2}{0.25} = 55 \text{ MPa}$$

Dvs. en økning på 55 MPa.

3.5.5 Innvirkning av celledørrelse og kornstørrelse på flytmotstanden

Dersom dislokasjoner som beveger seg støter mot hindringer som de ikke kan passere, dannes det såkalte "pile-ups". Det er en "kø" med dislokasjoner i samme glidesystem som stanser opp mot hindringen.

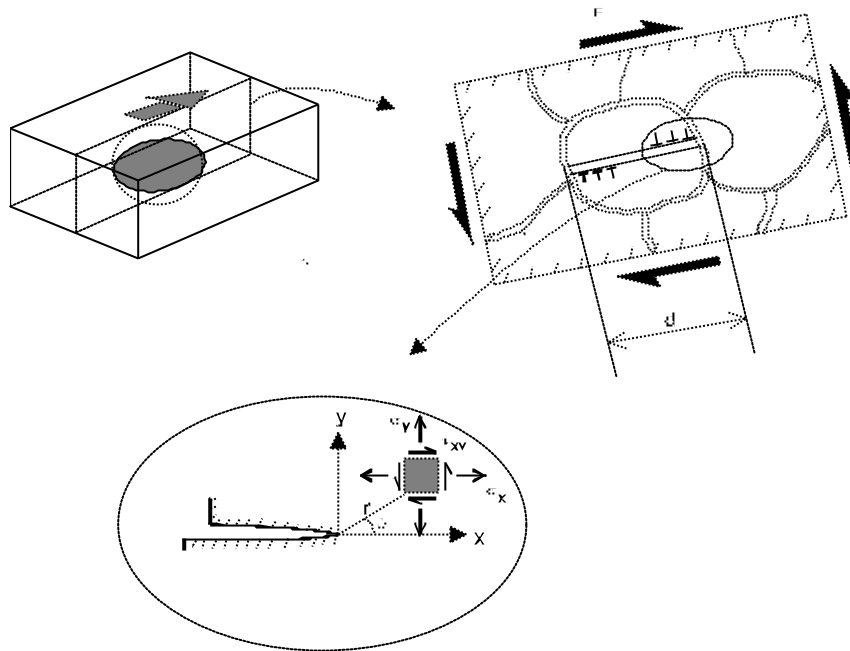
Ved en slik "pile-up" bygges det opp en lokal spenningskonsentrasjon rundt fronten av "køen". Skjærspenningen τ_{xy} for $\theta=0$, Figur 3-57 er fra elastisitetsteorien gitt ved:

$$\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2pr}} \quad , \quad K_{II} = \frac{4(t_y - t_g)}{p(2-n)} \sqrt{p \frac{d}{2}}$$

der τ_y er ytre påtrykt skjærspenning, τ_g er glidemotstand innenfor krystallet (kornet), d er korn- eller cellediameter og K_{II} er spenningsintensitetsfaktor for Modus II belastning (fra bruddmekanikken).

Anta at denne spenningskonsentrasjonen forårsaker generering av dislokasjoner i nabokornet og dermed utløser plastiske flyt. Dette gir den velkjente *Hall-Petch-relasjon*, empirisk vel etablert for virkning av kornstørrelse på flytmotstand (flytespenning):

$$t_y = t_g + A \frac{1}{\sqrt{d}}$$



Figur 3-57 Dislokasjoner som beveger seg og støttermot hindringer som de ikke kan passere, danner "pile-ups" — en "kø" med dislokasjoner i samme glidesystem.

3.5.6 Den samlede virkning av styrkemekanismene

Oppsummert har man følgende bidrag til økning av flytmotstand:

$$\text{korngrenser: } t_F = \sum t + A \frac{1}{\sqrt{d_k}}$$

$$\text{cellegrenser: } t_c = a \frac{1}{\sqrt{d_c}}$$

$$\text{utfelling: } t_p = \frac{Gb}{4pr} \sqrt{f} \ln \frac{r}{b} \tag{3.22}$$

$$\text{opløste atomer: } t_a \propto G\sqrt{c}$$

$$\text{dislokasjonsvaser: } t_d \propto Gb\sqrt{rd} \approx G\sqrt{\frac{b}{d}}g$$

d_k er korndiameter

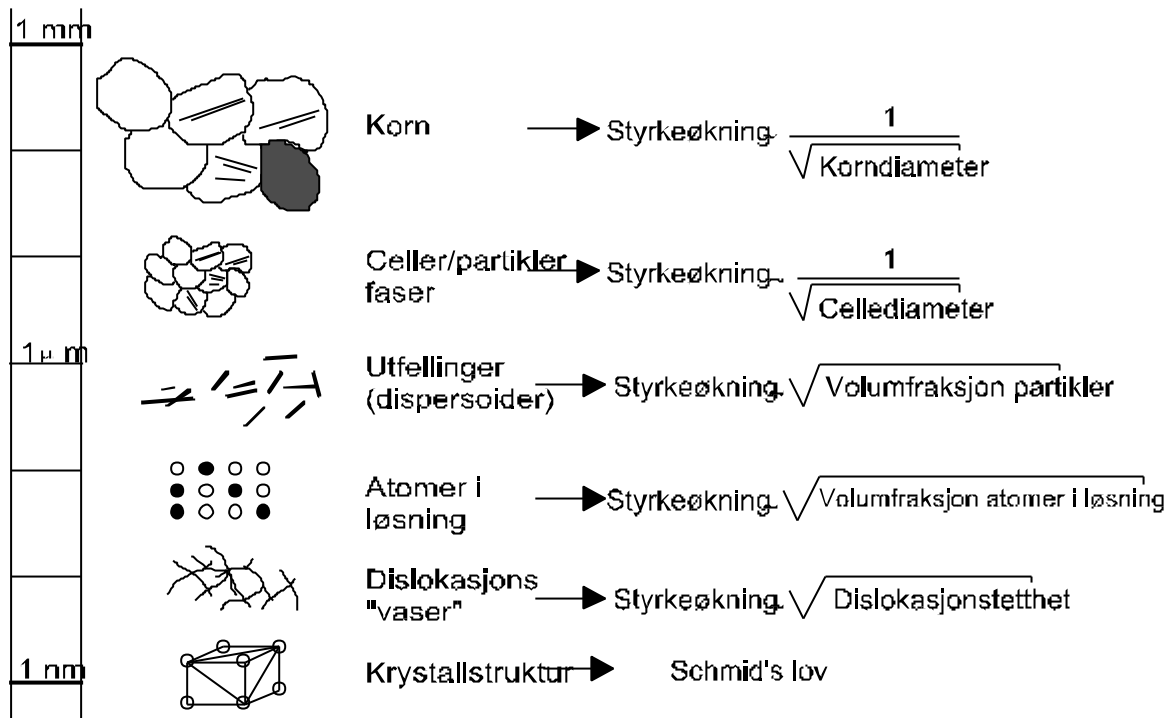
d_c er cellediameter

f er volumfraksjon partikler

c er volumfraksjon atomer i løsning

ρ_d er dislokasjonstetthet og γ er plastisk tøyning.

τ_{CRSS} er avhengig av krystallstrukturen.



Figur 3-58 Styrkemekanismer.

Figur 3-58 viser de forskjellige bidrag til økning av flytmotstand. Som man ser virker de på forskjellige størrelsesnivå, fra 1 nm til omkring 100 μm, dvs. 5 dekadere i størrelsesorden. Flere fenomener, som siging, utmatting, sprekkeforplantning og slitasje, har sin årsak i plastiske flytfenomener. For disse fenomener vil kanskje mekanismer på ett nivå være av sentral betydning. F.eks. under skadeutvikling ved utmatting, der et bestemt glidesystem i ett bestemt korn er operativt. En forståelse av dette fenomenet krever en meget detaljert analyse av struktur/deformasjonssamspill for en spesiell mekanisme, og under forutsetning av additivitet på alle nivå fås flytmotstand til et glidesystem innen et krystallkorn i et polykrystall:

$$t_F = t_{CRSS} + t_d + t_a + t_p + t_c + A \frac{1}{\sqrt{d}}$$

$$t_F = t_{CRSS} + G\sqrt{b^2 r d} + G\sqrt{c} + \frac{G}{4p} \left(\frac{b}{r} \ln \frac{r}{b} \right) \sqrt{f} + \frac{a}{\sqrt{d_c}} + \frac{A}{\sqrt{d_k}}$$

For en strekkstav av et polykrystallinsk kubisk metall med tilfeldig krystallorientering av de enkelte korn er flytspenningen σ_F gitt ved

$$s_F = M t_F = 3.06 t_F \quad \text{der } M \text{ er Taylor-faktoren.}$$

Bibliografi

1. Ashby, M.F. & Jones, D.R: *Engineering Materials 1: An introduction to their Properties and Applications*, Pergamon Press, reprint 1987.
2. Dieter, G.E: *Mechanical Metallurgy* (SI Metric Edition), McGraw-Hill Book Co. 1988
3. McCrum, N.G: Buckley, B.P & Bucknall, C.B: *Principles of Polymer Engineering*, Oxford Science Publication, 1988.
4. Irgens, F: *Fasthetslære*, 4. utgave, Tapir 1991.
5. Backofen, W.A: *Deformation Processing*, Addison Wesley, 1972.
6. Yang, Wei & Lee, W.B: *Mesoplasticity and its Applications*, Springer Verlag.