Sammendrag kapittel *9 - Geometri*

Absolutt vinkelmål (radianer)

- Det absolutte vinkelmålet til en vinkel v, er folholdet mellom buelengden b, og radien r.

$$\boxed{v = \frac{b}{r}}$$

Buelengde

$$\boxed{b = r \cdot v}$$

Med v i radianer!

Omregning

n° Gradtall

v radiantall

$$\boxed{v = \frac{n^\circ}{180} \cdot \pi} \qquad \boxed{n^\circ = \frac{v}{\pi} \cdot 180}$$

Areal av sirkelsektor

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \cdot v \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot r}$$

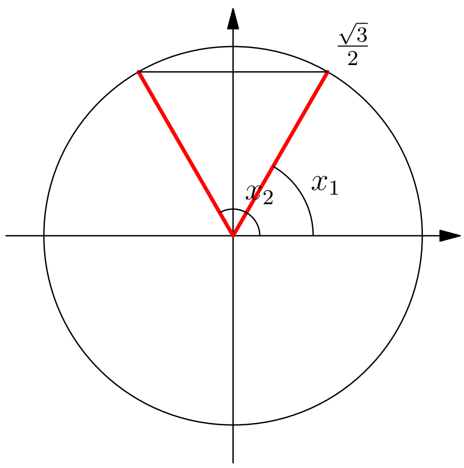
Sammendrag kapittel *10 - Trigonometri i radianer*

Trigonometriske likninger

- Løs som før

$$\begin{aligned} 2\sin(x) - \sqrt{3} &= 0 \\ 2\sin(x) &= \sqrt{3} \\ \sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Tegner så en enhetssirkel.



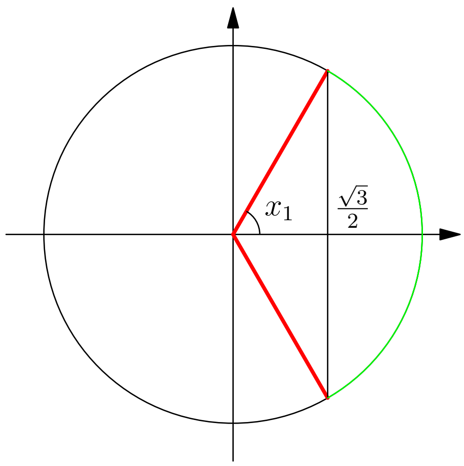
$$
\begin{aligned}
x =& \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller} && \text{(tilsvarer } x_1\text{)} \\
x =& \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi && \text{(tilsvarer } x_2\text{)} \\
=& \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

Så må vi forandre på n til vi finner svar som er innenfor intervallet gitt i oppgava.

Trigonometriske ulikheter

$$
\begin{aligned}
2\cos(x) - \sqrt{3} > 0 \\
\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Tegner enhetssirkel



Det grønne området på figuren er det området der likningen er gyldig. Altså der $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Finner først vinklene der

$$
\begin{aligned}
\cos(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\
x &= \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller} \\
x &= -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi
\end{aligned}
$$

Tilpasser nå n til vi får løsninger som ligger innenfor intervallet gitt i oppgava.

* Intervall $x \in [-\pi, \pi] \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$.
* Intervall $x \in [0, 2\pi\rangle$ Her må vi fikse på den andre løsningen vår siden den er utenfor dette ntervallet. Setter da $n = 1$.

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

Begynner da ved nedre grense (0) og går i positiv omløpsregning til vi kommer innenfor det grønne området på figuren. Her begynner vi i det grønne området og skriver derfor:

$$0 \leq x < ...$$

Vi skal altså ha med 0. Dette ser vi fra klammen i intervallet [. Dette betyr at 0 skal være med. Vi dreier positivt til vi kommer ut av området. Da er vinkelen $\pi/6$.

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6}$$

Vi fortsetter å dreie til vi kommer inn i området igjen. Dette skjer når vinkelen er $11\pi/6$. Vi skal ikke ha med vinkelen $11\pi/6$ siden uttrykket ikke skal være 0, bare *større* enn 0.

$$\frac{11\pi}{6} < x < ...$$

Vi dreier videre til vi kommer ut av det grønne området eller intervallet gitt i oppgava.

$$\frac{11\pi}{6} < x < 2\pi$$

Vi skal ikke ha med 2π siden dette ikke er med i intervallet ($x \in [0, 2\pi\rangle$).

<u>Amplitude, periode og fase</u>

– Vi ser på funksjonen

$$a \sin\left(k(x - \phi)\right) + c$$

Symbol	Beskrivelse
$A = \|a\|$	amplitude, bestemmer svingemengde.
k	$p = \dfrac{2\pi}{k}$ er perioden.
	k sier noe om hvor "fort" grafen svinger.
ϕ	Fasefaktor. Flytter grafen mot høyre eller venstre.
	$\phi > 0$ mot høyre, $\phi < 0$ mot venstre,
c	Konstantledd eller likevektslinje. Flytter grafen opp og ned.

<u>Derivasjonsregler</u>

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2 x$$

Sammendrag kapittel *15 - Integrasjon*

Trigonometriske funksjoner

- $\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C$
- $\int \sin(x)\ dx = -\cos(x) + C$
- $\int \left(1 + \tan^2(x)\right)\ dx = \tan(x) + C$
- $\int \left(\frac{1}{\cos^2(x)}\right)\ dx = \tan(x) + C$

Lineær kjerne

- $\int f(ax+b)\ dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

Eks. $\int \frac{1}{-x+3}\ dx = \frac{1}{-1} \ln|-x+3| + C = -\ln|3-x| + C$

Variabelskift

$$\boxed{\int f(u(x)) \cdot u'(x)\ dx = \int f(u)\ du}$$

Altså med $u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow u'dx = du$

Es.

$$\int 2xe^{x^2}\ dx \text{ med kjerne: } u = x^2 \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = 2x$$
$$\int e^{x^2} \underbrace{2x\ dx}_{du} = \int e^u\ du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

- evt.

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$
$$\int 2x \cdot e^{x^2} \frac{du}{2x} = \int e^u du = e^u + C = e^{x^2} + C$$

Delvis integrasjon

- $$\boxed{\int u'(x) \cdot v(x)\ dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)\ dx}$$
- Hva som kalles $u'(x)$ og $v(x)$ er det som gjør at integralet på høyre side blir lettest å løse.

Eks. $\displaystyle\int x \cdot \ln(x)\ dx$

Kan ikke derivere $\ln x$ alene. Velger derfor $v(x) = \ln x$

$$\begin{array}{ll} v = \ln(x) & v'(x) = \frac{1}{x} \\ u'(x) = x & u = \frac{1}{2}x^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\int \overbrace{x}^{u'} \overbrace{\ln x}^{v}\ dx &= \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{u} \cdot \overbrace{\ln x}^{v} - \int \overbrace{\frac{1}{2}x^2}^{u} \cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{v'}\ dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2}\int x\ dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C}}
\end{aligned}$$

<u>Delbrøksoppspaltning</u>

- Skriv integranden som en sum av brøker der nevneren er av første grad. Integrer deretter brøkene leddvis.

$$\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}\ dx = \int \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x-1)}\ dx$$

Altså: $\displaystyle\frac{A(x-1)}{(x+2)(x-1)} + \frac{B(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}$

Vi ser bare på tellerne siden nevnerene er like: $A(x+1)+B(x+2) = 2x+1$

$\underline{x = 1}$ $\ 0 + B \cdot 3 = 3 \Rightarrow B = 1$

$\underline{x = -2}$ $\ A(-3) + 0 = 2 \cdot (-2) + 1 \Rightarrow A = 1$

Dette betyr at: $\displaystyle\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)}$

Og vi kan skrive integralet som:

$$\int \frac{1}{(x+2)} + \frac{1}{(x-1)}\ dx = \underline{\underline{\ln|x+2| + \ln|x-1| + C}}$$

<u>Differensiallikninger</u>

$$\begin{array}{r|r|r}
y' + y = 3 & \displaystyle\int \frac{dy}{(3-y)} = \int dx & 3 - y = C_2 e^{-x} \\
\displaystyle\frac{dy}{dx} + y = 3 & -\ln|3-y| = x + C_1 & -y = C_2 e^{-x} - 3 \\
\displaystyle\frac{dy}{dx} = 3 - y & \ln|3-y| = -x - C_1 & y = C_3 e^{-3} + 3 \\
dy = (3-y) \cdot dx & |3-y| = e^{-x-C_1} & y = Ce^{-x} + 3 \\
\displaystyle\frac{dy}{(3-y)} = dx & 3 - y = \pm e^{-x} \cdot e^{-C_1} &
\end{array}$$

Sammendrag kapittel *12 - Vektorer*

Vektorer og skalarer

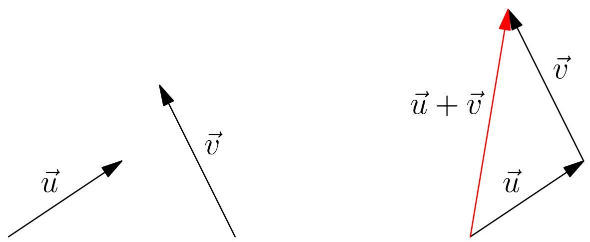
- En vektor er en størrelse som har retning.
- En skalar er en størrelse uten retning.

Spesielle vektorer

- Nullvektor: lengde 0, parallell med alle andre vektorer. Symbol: $\vec{0}$.
- Enhetsvektor: lengde 1, symbol : $\vec{e}$.

Sum av vektorer

- Når vi skal finne summen av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$, tenger vi først $\vec{u}$. Deretter tegner vi $\vec{v}$ med utgangspunkt i endepunktet for $\vec{u}$. Summen av $\vec{u}+\vec{v}$ går nå fra utgangspunktet for $\vec{u}$ til endepunktet for $\vec{v}$.



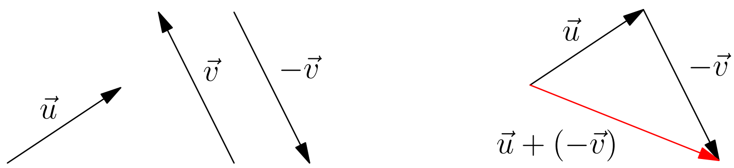
- For tre punkter A, B og C er

$$\boxed{\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}}$$

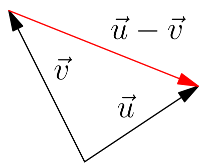
Differanse av vektor

Metode 1 Vi finner differansen $\vec{u}-\vec{v}$ ved å summere $\vec{u}$ og $-\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})}$$



Metode 2 Vi kan også tegne vektorene $\vec{u}$ og $\vec{v}$ med felles utgangspunk. Vektoren $\vec{u}-\vec{v}$ går da fra endepunktet for $\vec{u}$ til endepunktet for $\vec{v}$.



Huskeregel

- Vektor vi **trekker fra** flytter **startpunktet**.
- Vektor vi **legger til** flytter **endepunktet**.

Produkt av tall og vektor

- Vektoren $t \cdot \vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$ og $|t|$ ganger så lang som $\vec{v}$.
  * $t > 0$, $\vec{v}$ og $t \cdot \vec{v}$ samme retning.
  * $t < 0$, $\vec{v}$ og $t \cdot \vec{v}$ motsatt retning.

Parallelle vektorer

- To vektorer er parallelle hvis de har samme eller motsatt retning. Vektorene $\vec{v} \neq 0$ og $\vec{u} \neq 0$ er paralelle hvis og bare hvis der finnes et tall t slik at $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$.

Noen regneregler

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- $t \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = t \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{b}$
- $t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a} = (t + s)\vec{a}$
- $s \cdot (t\vec{a}) = (s \cdot t)\vec{a}$

Dekomponering

- La $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer som ikke er parallelle, og som ikke er lik nullvektoren. For en fritt valgt vektor $\vec{v}$ fins det da ett tall x og ett tall y slik at at

$$\vec{v} = x \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

- Det er vanlig å dekomponere en vektor i planet vha enhetsvektorer som peker i horisontal og vertikal retning.

$$\vec{v} = x \cdot \vec{e_1} + y \cdot \vec{e_2}$$

Skalarproduktet

- La u være vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Da er skalarproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos u$$

Sammendrag kapittel *13 - Vektorer i planet*

Regneregler for vektorkoordinater

- $[x_1, y_1] + [x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2]$
- $[x_1, y_1] - [x_2, y_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2]$
- $t[x, y] = [tx, ty]$

Vektoren mellom to punkter

- Vektoren fra origo $O(0,0)$ til $A(x,y)$ har koordinatene $\vec{OA} = [x,y]$.
- Vektoren fra $A(x_1,y_1)$ til $B(x_2,y_2)$ har koordinatene $\vec{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$.

Lengden av en vektor

- $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ for $\vec{v} = [x,y]$
- HER SKAL En fiGUR SOM VISEr LENGNGgEn

Avstanden mellom to vektorer

- Avstanden mellom (x_1,y_1) og (x_2,y_2) er

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Determinant

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- Nyttig for å se om vektorer er parallelle, siden vektorene $[x_1,y_1]$ og $[x_2,y_2]$ er parallelle bare dersom

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

Arealet av et parallellogram

- Arealet av et parallellogram er absoluttverdien av determinanten til to vektorer som bestemmer parallellogrammet. Det vil si to sidevektorer som ikke er parallelle.

Koordinatformelen for skalarproduktet

- $[x_1,y_1] \cdot [x_2,y_2] = x_1x_2 + y_1y_2$

Vinkelrette vektorer

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ for $\vec{a} \neq \vec{0}$ og $\vec{b} \neq \vec{0}$

Sammendrag kapittel *14 - Vektorer i rommet*

Regneregler for tredimensjonale vektorer

- Regnereglene er de samme for tredimensjonale som for todimensjonale vektorer.

Dekomponering og vektorkoordinater

– Nå dekomponerer vi en vektor $\vec{v}$ i tre komponenter, langs x-, y- og z-aksen.

$$\vec{v} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$$

Rekneregler for vektorkoordinater

- $[x_1, y_1, z_1] + [x_2, y_2, z_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2]$
- $[x_1, y_1, z_1] - [x_2, y_2, z_2] = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2]$
- $t[x, y, z] = [tx, ty, tz]$