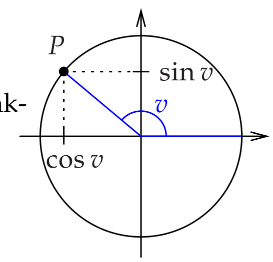
Sammendrag R2

www.kalkulus.no

31. mai 2009

1 Trigonometri



Definisjon av sinus og cosinus Sirkelen med sentrum i origo og radius 1 kalles enhetssirkelen. La v være en vinkel i grunnstilling, og la P være skjæringspunktet mellom enhetssirkelen og det andre vinkelbeinet til v. Da er

$$\begin{aligned} \cos v &= x\text{-koordinaten til } P \\ \sin v &= y\text{-koordinaten til } P \end{aligned}$$

Definisjon av tangens

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}$$

Radianer La vinkel v ha toppunkt i sentrum av en sirkel med radius r. Hvis b er buelengden v spenner over, så er v målt i radianer gitt ved

$$v = \frac{b}{r}$$

Siden v er et forhold mellom to lengder, b og r, er dette en størrelse uten benevning.

Omregning mellom radianer og grader

$$\begin{aligned} n^\circ &= \frac{v}{\pi} \cdot 180^\circ \\ v &= \frac{n^\circ}{180^\circ}\pi \end{aligned}$$

Enhetsformelen

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Trigonometriske identiteter

$$\begin{aligned} \cos(-v) &= \cos v \\ \sin(-v) &= -\sin v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(u+v) &= \cos u \cdot \cos v - \sin u \cdot \sin v \\ \cos(u-v) &= \cos u \cdot \cos v + \sin u \cdot \sin v \\ \sin(u+v) &= \sin u \cdot \cos v + \cos u \cdot \sin v \\ \sin(u-v) &= \sin u \cdot \cos v - \cos u \cdot \sin v \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin 2u &= 2\sin u \cdot \cos u \\
\cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u \\
&= 2\cos^2 - 1 \\
&= 1 - \sin^2 u
\end{aligned}
$$

Harmonisk svingning Funksjonener som kan skrives på formen

$$A\sin(kx + \varphi) + d$$

kalles en harmonisk svingning.

Omskriving av harmonisk svingning

$$a\sin kx + b\cos kx = A\sin(kx + \varphi)$$

der

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

og

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) & \text{, hvis } a > 0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{, hvis } a < 0 \end{cases}$$

Grafen til en harmonisk svingning

- Likevektslinje: $y = d$
- Amplitude: A
- Periode: $\frac{2\pi}{|k|}$
- Faseforskyvning: $\left|\frac{\varphi}{k}\right|$. Faseforskyvningen er mot venstre hvis $\frac{\varphi}{k} > 0$ og mot høyre hvis $\frac{\varphi}{k} < 0$.

Derivasjonsregler

x er målt i radianer

$$
\begin{aligned}
(\sin x)' &= \cos x \\
(\cos x)' &= -\sin x \\
(\tan x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
&= 1 + \tan^2 x
\end{aligned}
$$

Rad.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Grader.	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Tabell 1: Noen trigonometriske verdier

2 Integralregning

Antiderivert og ubestemt integral F er antiderivert til f hvis $F'(x) = f(x)$. Alle antideriverte til f kan skrives

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

der C er en konstant. $\int f(x)dx$ kalles det ubestemte integralet til f.

Sum av integraler Vi kan beregne integraler ledd for ledd. Det vil si at

$$\int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Integral multiplisert med konstant Vi kan trekke ut en konstant når vi beregner et integral. Det vil si at hvis k er en konstant så er

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

Potens For $r \neq -1$ er

$$\int x^r dx = \frac{1}{1+r} x^{r+1} + C$$

Integralet av $\frac{1}{x}$ For $x \neq 0$ er

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Eksponential- og logaritmefunksjon

$$\begin{aligned}
\int e^x dx &= e^x + C \\
\int e^{kx} dx &= \frac{1}{k} e^{kx} + C \\
\int a^x dx &= \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \\
\int a^{kx} dx &= \frac{1}{k \cdot \ln a} \cdot a^{kx} + C \\
\int \ln x dx &= x \cdot \ln x - x + C
\end{aligned}$$

Lineær kjerne Hvis F er en antiderivert til f så er

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

Trigonometriske funksjoner

$$\begin{aligned}
\int \cos x\, dx &= \sin x + C \\
\int \sin x\, dx &= -\cos x + C \\
\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx &= \int (1+\tan^2 x)dx = \tan x + C \\
\int \tan x\, dx &= -\ln(|\cos x|) + C \\
\int \tan^2 x\, dx &= \tan x - x + C
\end{aligned}$$

Substitusjon (variabelskifte)

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \int f(u)du$$

Delvis integrasjon La u og v være funksjoner av x

$$\int uv'dx = uv - \int u'v\, dx$$

Delbrøksoppspalting Hvis $P(x)$ er polynom av lavere grad enn $Q(x)$, og $Q(x)$ kan faktoriseres i $Q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ så er

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \frac{P(x)}{q_1(x) \cdot q_2(x)}dx = \int \frac{A}{q_1(x)} + \frac{B}{q_2(x)}dx$$

der $A \cdot q_2(x) + B \cdot q_1(x) = P(x)$. Vi finner A og B ved å sette

$$A = \frac{P(x_1)}{q_2(x_1)} \quad \text{og} \quad B = \frac{P(x_2)}{q_1(x_2)}$$

der x_1 er nullpunkt for q_1 og x_2 er nullpunkt for q_2.

Bestemt integral La F være antiderivert til f. Da er

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bestemt integral og areal Hvis $f(x) \geq 0$ på intervallet $[a,b]$ er arealet avgrenset av x-aksen, grafen til f, linja $x = a$ og linja $x = b$

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Dersom $f(x) \leq 0$ på intervallet $[a,b]$ er arealet avgrenset av x-aksen, grafen til f, linja $x = a$ og linja $x = b$

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

Dersom f er både positiv og negativ på et intervall beregnes arealet ved å dele opp i intervaller der f har samme fortegn.

Volum av omdreiningslegeme La $\mathcal{A}$ være flatestykket avgrenset av linjene $x = a$, $x = b$, x-aksen og grafen til f. Hvis vi dreier flatestykket, $\mathcal{A}$, 360° om x-aksen får vi et omdreiningslegeme med volum

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

3 Vektorer i rommet

Regneregler for vektorer i rommet Regnereglene for vektorer i rommet tilsvarer regneregler for vektorer i planet. Se grunnleggende regler for vektorregning i heftet "Sammendrag R1".

Skalarprodukt La u være vinkelen mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Da er skalarproduktet av $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos u$$

legg merke til at skalarproduktet gir et tall (en skalar). Regnereglene for skalarprodukt er de samme som er gjengitt i heftet "Sammendrag R1".

Koordinatformelen for skalarprodukt

$$[x_1, y_1, z_1] \cdot [x_2, y_2, z_2] = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Ortogonale vektorer To vektorer er ortogonale (står vinkelrett på hverandre) hvis og bare hvis skalarproduktet blir null

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Vektorer mellom to punkt Vektoren fra $A(x_1, y_1, z_1)$ til $B(x_2, y_2, z_2)$ er

$$\overrightarrow{AB} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1]$$

Posisjonsvektoren til et punkt Posisjonsvektoren til punktet $P(x, y, z)$ er vektoren som starter i origo og ender i P og skrives

$$\overrightarrow{OP} = [x, y, z]$$

Lengden av en vektor Lengden av vektoren $\vec{u}$ =$[x, y, z]$ er

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

2×2 **determinanter** Vektorene $[x_1, y_1]$ og $[x_2, y_2]$ er radvektorer i determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1$$

3×3 **determinanter** Vektorene $[x_1, y_1, z_1]$, $[x_2, y_2, z_2]$ og $[x_3, y_3, z_3]$ er radvektorer i determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Vektorprodukt (kryssprodukt) La $\vec{a} = [x_1, y_1, z_1]$ og $\vec{b} = [x_2, y_2, z_2]$, da er

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left[\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right] \\
&= [y_1 z_2 - y_2 z_1, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1]
\end{aligned}$$

Legg merke til at $\vec{a} \times \vec{b}$ er en ny vektor, som står vinkelrett på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Lengden av $\vec{a} \times \vec{b}$ Lengden av vektoren $\vec{a} \times \vec{b}$ er

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$$

Parallelle vektorer To vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som ikke er nullvektorer, er parallelle hvis og bare hvis vektorproduktet gir nullvektor

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Arealberegning med vektorprodukt Arealet av et parallellogram utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Arealet av en trekant utspent av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \frac{1}{2} \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

Volumberegning med vektorprodukt Volumet av et parallellepiped spent ut av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er

$$V = \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

Volumet av en pyramide med parallellogram som grunnflate spent ut av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er

$$V = \frac{1}{3} \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

Volumet av et tetraeder (trekantet pyramide) utspent av vektorene $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er

$$V = \frac{1}{6} \left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\right|$$

4 Romgeometri

Likning for et plan Likningen for et plan gjennom punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ med normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$ er

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Tilsvarende har et plan gitt ved

$$ax + by + cz + d = 0$$

normalvektor $\vec{n} = [a, b, c]$.

Parameterframstilling for en linje En linje ℓ som går gjennom punktet $P(x_0, y_0, z_0)$ og er parallell med vektoren $\vec{r} = [a, b, c]$, har parameterframstilling

$$\ell : \begin{cases} x = & x_0 + at \\ y = & y_0 + bt \\ z = & z_0 + ct \end{cases}$$

Vinkel mellom to plan La $\vec{n}_\alpha$ være normalvektor til et plan α og la $\vec{n}_\beta$ være normalvektor til et plan β. Vinkelen v mellom α og β er da

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| \cdot |\vec{n}_\beta|}\right)$$

Vinkel mellom to linjer La $\vec{r}_\ell$ være retningsvektor for ei linje ℓ og $\vec{r}_m$ være retningsvektor for ei linje m. Da er vinkelen v mellom ℓ og m

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{r}_\ell \cdot \vec{r}_m|}{|\vec{r}_\ell| \cdot |\vec{r}_m|}\right)$$

Vinkel mellom linje og plan La $\vec{r}$ være retningsvektoren for ei linje ℓ og la $\vec{n}$ være normalvektor for et plan α. Da er vinkelen v mellom ℓ og α

$$v = 90^\circ - \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{r} \cdot \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Avstand fra punkt til plan Avstanden mellom punktet $P(x_1, y_1, z_1)$ og planet

$$ax + by + cz + d = 0$$

er gitt ved

$$d = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Avstand fra punkt til linje Avstanden fra punktet P til linja gjennom A med retningsvektor $\vec{r}$ er

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{r}\right|}{|\vec{r}|}$$

Likningen for en kuleflate En kuleflate med sentrum i (x_0, y_0, z_0) og radius r har likningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

5 Følger og rekker

Følge En følge er en opplisting av tall

$$a_1, a_2, a_3...$$

Hver a_i kalles ledd, og tallet i kalles indeksen til leddet. Indeksen er alltid hele tall.

Aritmetisk følge En følge er aritmetisk hvis alle ledd med indeks $i > 1$ er slik at

$$a_i = a_{i-1} + d$$

som vil si at hvert ledd i følgen er det samme som leddet foran pluss et bestemt tall, d, som kalles følgens differanse. Det n'te leddet i en aritmetisk følge er gitt ved

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Geometrisk følge En følge er geometrisk hvis alle ledd med indeks $i > 1$ er slik at

$$a_i = k \cdot a_{i-1}$$

som vil si at hvert ledd i følgen er det samme som leddet foran multiplisert med et bestemt tall, k, som kalles følgens kvotient. Det n'te leddet i en geometrisk følge er gitt ved

$$a_n = k^{n-1} \cdot a_1$$

Rekke En rekke er uttrykket vi får når vi adderer leddene i følge, altså

$$a_1 + a_2 + a_3...$$

summen av de n første leddene i en rekke skrives

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Aritmetisk rekke En aritmetisk rekke har ledd tilsvarende en aritmetisk følge. Summen av de n første leddene i en slik rekke er

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Geometrisk rekke En geometrisk rekke har ledd tilsvarende en geometrisk følge. Summen av de n første leddene i en slik rekke er

$$s_n = \frac{a_1 \left(k^n - 1\right)}{k - 1}$$

Konvergens og divergens En rekke sies å konvergere til summen s når $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. En rekke divergerer når den ikke konvergerer. En geometrisk rekke konvergerer mot

$$s = \frac{a_1}{1-k}$$

når kvotienten k er slik at $-1 < k < 1$.

Konvergensområde En geometrisk rekke med variabel kvotient $k(x)$ konverger for alle verdier av x som er slik at $-1 < k(x) < 1$. De verdiene av x som gjør at rekka konvergerer kalles konvergensområdet til rekka.

Summen av geometrisk rekke med variabel kvotient Summen av en uendelig geometrisk rekke med variabel kvotient, $k(x)$, kan bare beregnes for verdier av x som er innenfor konvergensområdet til rekka. Summen er da

$$s(x) = \frac{a_1}{1-k(x)}$$

Legg merke til $s(x)$ blir en funksjon av x som ikke er definert utenom konvergensområdet til rekka.

Induksjonsprinsippet Hvis en påstand er slik at

1. den er sann når $n = 1$
2. hvis den er sann for $n = k$ så er den også sann for $n = k + 1$

så er den sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Bevis ved induksjonsprinsippet For å bevise en hypotese ved induksjon viser du

1. den er sann for $n = 1$
2. anta hypotesen er sann for $n = k$. Vis at hypotesen da er sann for $n = k + 1$

du har da vist at hypotesen er sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

6 Differensiallikninger

6.1 Lineær førsteordens differensiallikning

En lineær første ordens differensialliking med konstante koeffisienter kan skrives på formen

$$y' + by = f(x)$$

videre er likningen homogen hvis den er på formen

$$y' + by = 0$$

Løsning Likningen $y' + by = f(x)$ har den generelle løsningen

$$y = \left(\int f(x)e^{bx}dx \right) \cdot e^{-bx}$$

6.2 Separabel førsteordens differensiallikning

En førsteordens differensiallikning er separabel hvis den kan skrives på formen

$$g(y) \cdot y' = f(x)$$

Løsning Sett $y' = \frac{dy}{dx}$ som gir

$$\begin{aligned} g(y)\frac{dy}{dx} &= f(x) \\ g(y)dy &= f(x)dx \\ \int g(y)dy &= \int f(x)dx \end{aligned}$$

vi beregner så integralet på begge sider av likhetstegnet, og løser med hensyn på y.

6.3 Lineære andreordens differensiallikninger

En lineær andreordens differensiallikning med konstante koeffisienter er på formen

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

videre er likningen homogen hvis den er på formen

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Karakteristisk likning Den karakteristiske likningen til differensiallikningen $ay'' + by' + cy = 0$ er

$$ar^2 + br + c = 0$$

Løsning Når vi skal løse likningen $ay'' + by' + cy = 0$, løser vi først den tilhørende karakteristiske likningen. Dette kan gi tre ulike tilfeller

1. Hvis den karakteristiske likningen har de to reelle løsningene $r = r_1$ og $r = r_2$ er løsningen av differensiallikningen

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}$$

2. Hvis den karakteristiske likningen har en, og bare en, reell løsning $r = r_1$er løsningen av differensiallikningen

$$y = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x} = (C + Dx)e^{r_1 x}$$

3. Hvis den karakteristiske likningen har komplekse løsninger er disse på formen $r_1 = p + qi$ og $r_2 = p - qi$. Løsningen av differensiallikningen er da

$$y = e^{px}\left(C\sin qx + D\cos qx\right)$$

der C og D er vilkårlige konstanter og $i = \sqrt{-1}$.

Tillegg: Komplekse tall

Vi definerer tallet $i = \sqrt{-1}$. Likningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

har da løsning selv når diskriminanten $b^2 - 4ac < 0$. Løsningene er da på formen

$$\begin{aligned} x_1 &= p + qi \\ x_2 &= p - qi \end{aligned}$$

der $p = \frac{-b}{2a}$ og $q = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$.

Eksempel Løs likningen

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

Formelen for løsing av andregradslikning gir at

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 5}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-2}{2} \pm \frac{\sqrt{-1 \cdot 16}}{2} \\ &= -1 \pm \frac{\sqrt{-1} \cdot 4}{2} \\ &= -1 \pm 2 \cdot \sqrt{-1} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

dermed er løsningen $x_1 = -1 + 2i$ og $x_2 = -1 - 2i$.