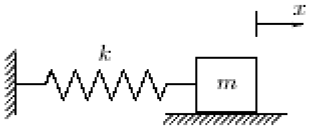
Periodiske svingninger (udempede)

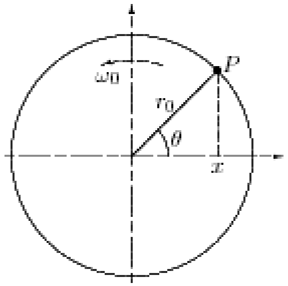


Masse og fjær, med fjærkonstant k. Massen glir på friksjonsfritt underlag.

Newtons 2. lov gir: $m\ddot{x} = -kx$ dvs. $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ hvor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

som gir løsning: $x(t) = C_1 \cos\omega_0 t + C_2 \sin\omega_0 t = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ hvor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$,

og C_1 og C_2 eller A og θ er konstanter som finnes av grensebetingelsene i problemet.

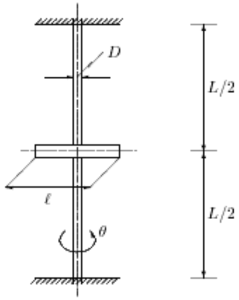


Uniform rotasjon.

Vinkelen er: $\theta = \omega_0 t + \theta_0$, og posisjonen er: $x = r\cos(\omega_0 t + \theta_0)$

Newtons 2. lov gir: $F = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x$ dvs. $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ som for fjæra over.

Denne ligninga beskriver en udempet harmonisk oscillator.

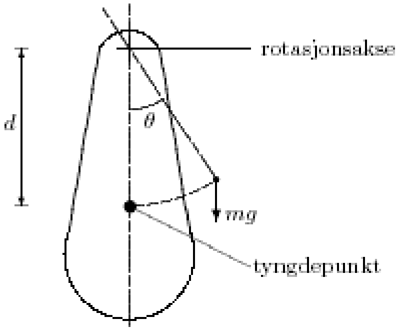


Torsjons-svingning. En stav er festet midt på en tråd som er festet i begge ender.

Rotasjonsbevegelsen finnes fra dreiemomentligningen: $\tau = I\dfrac{d\omega}{dt} = I\ddot{\theta}$, hvor I = treghetsmomentet til staven som er opphengt i tråden. Sammenhengen mellom vridningsvinkel og dreiemoment for en tråd med lengde b er: $\dfrac{\theta}{b} = -K(\mu, D)\tau$, hvor $K(\mu, D) = 32/(\pi\mu D^4)$ er en konstant.
(μ = skjærmodulen og D = diameteren til tråden).

For systemet til venstre fås: $\tau = \tau_1 + \tau_2 = -2\dfrac{\mu\pi D^4}{32 \cdot (L/2)}\theta = -\kappa\theta$, hvor κ = torsjonskonstanten.

Svingeligninga blir dermed: $\ddot{\theta} + \dfrac{\kappa}{I}\theta = 0$ eller $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ hvor $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I}$



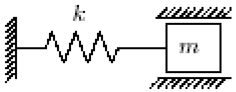
Fysisk pendel.

Dreiemomentet om rotasjonsaksen er: $\tau = -dmg\sin\theta \approx -dmg\theta$ for $\theta \ll 1$.

Dreiemomentligningen $\tau = I\ddot{\theta}$ gir svingeligningen $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0}$ med $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$.

Matematisk pendel fås ved å betrakte punktmasse, dvs. $I = md^2$

Dempede svingninger

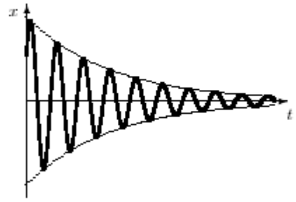


Stempel med demping.
Friksjonskraft: $F = -bv$

Newtons 2. lov: $F = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ gir dempet svingeligning $\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

hvor $\delta = b/2m$ er dempingskonstanten og $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ er egenfrekvens uten demping.

Løsningen er: $x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \theta_0)$ hvor $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$



$\delta < \omega_0$ gir underkritisk demping $x(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_d t + \theta_0)$

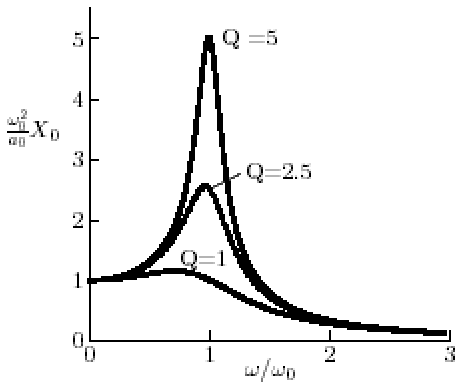
$\delta > \omega_0$ gir overkritisk demping $x(t) = A_1 e^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$, dvs. bevegelsen dempes ut uten svingninger.

Tvungne svingninger

Hvis et svingesystem påvirkes av en ytre kraft $F_0 \cos\omega t$ gir Newtons 2. lov: $F = m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega t$.

som gir svingeligningen: $\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = (F_0/m)\cos\omega t}$ hvor $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ og $\delta = b/2m$ som før.

Når pådraget F_0 har virket lenge nok vil alle transientene i systemet bli dempet ut, og systemet vil svinge med frekvens ω.



Løsningen av svingeligningen er:

$\boxed{x(t) = X_0(\omega)\cos(\omega t + \theta_0)}$ stasjonær respons, hvor $\boxed{X_0(\omega) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + 4\delta^2\omega^2}}}$

Q-verdien defineres ved: $Q = \omega_0/2\delta$ og angir høyden på resonanstoppen.

Grenseverdier blir:

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow X_0 \to \frac{F_0/m}{\omega_0^2}$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow X_0 = \frac{F_0/m}{2\delta\omega_0} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} \cdot \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow X_0 \to \frac{F_0/m}{\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2} \cdot \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \to 0$$

Harmoniske bølger

Bølgen kan skrives: $\boxed{y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t)}$ hvor - gir bølge i positiv x-retning og + gir bølge i negativ x-retning.

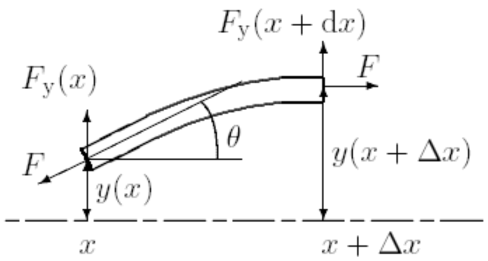
Bølgens fasehastighet er gitt ved: $v = \omega/k$, og $k = 2\pi/\lambda$ er bølgevektoren, og $\omega = 2\pi f$ er vinkelfrekvensen.

Bølgeligninga

Bølgeligninga er: $\boxed{\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$ hvor v er bølgehastigheten.

Alle to ganger deriverbare funksjoner av form $y(x,t) = f(x \pm vt)$ oppfyller bølgeligninga.

Svingende streng



Newtons 2. lov gir:

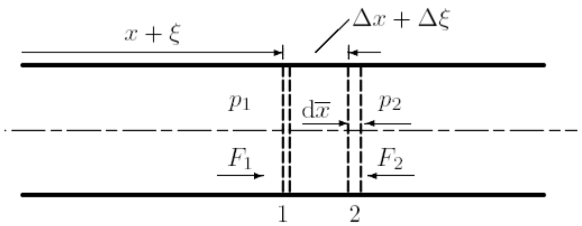
$$\rho A dx \cdot \ddot{y} = F_y(x+dx) - F_y(x) = F_y(x) + \frac{\partial F_y}{\partial x}dx - F_y(x) = \frac{\partial F_y}{\partial x}dx$$

videre gjelder $F_y = F\sin\theta \approx F\tan\theta = F\frac{\partial y}{\partial x}$

Dette gir bølgeligninga med bølgehastighet $v = \sqrt{\frac{F}{\rho A}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

Effekten til bølgen er $P = \left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 y_0^2$, hvor $\Delta E = \left(\frac{1}{2}\Delta m \cdot \dot{y}^2\right)_{max} = \frac{1}{2}\Delta m\omega^2 {y_0}^2$ og $\mu = \frac{\Delta m}{\Delta x}$

Lydbølger (longitudinale)



Newtons 2. lov gir:

$$\rho A dx \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = F_2 - F_1 = -A(p_2 - p_1) = -A\left(p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}dx - p_1\right) = -A\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

videre $p = -B\frac{dV}{V} = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$, som gir bølgeligninga med lydhastighet $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$

Effekten til lydbølgen er $P = \left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\rho A v\omega^2\xi_0^2$ og intensiteten $I = \frac{P}{A} = \frac{1}{2}\rho v\omega^2\xi_0^2$

Lydtrykk og decibelskalaen

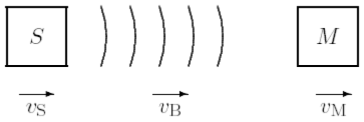
Til utslagsligninga $\xi(x, t) = \xi_0\cos(kx - \omega t)$ svarer en trykkbølge $\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V} = -B\frac{\partial \xi}{\partial x} = kB\xi_0\sin(kx - \omega t)$

som er faseforskjøvet $\pi/2$ i forhold til utslagsbølgen.

Lydtrykket er definert ved $p_{lyd} = (\Delta p)_{max} = kB\xi_0 = kv^2\rho\xi_0$ og intensiteten blir $I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2(p_{lyd}/(kv^2\rho)^2) = \frac{1}{2}\frac{p_{lyd}^2}{\rho v} = \frac{p_{lyd}^2}{\sqrt{\rho B}}$

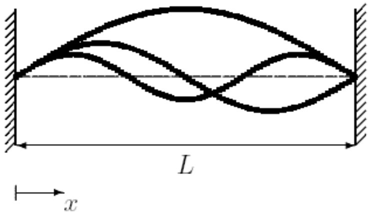
Lydnivå måles med decibelskalaen som er definert ved ($I_{min} = 10^{-12}$ W/m^2 definerer den minste hørbare lyd): $\boxed{\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_{min}}\right)}$ [dB]

Dopplereffekten



Dopplers formel er: $\boxed{\frac{f_S}{f_M} = \left(1 - \frac{v_S}{v_B}\right) \Big/ \left(1 - \frac{v_M}{v_B}\right)}$

Stående bølge på streng



Utsvinget er gitt ved $y(x,t) = y_0 \cos kx \cos \omega t$

Strengen er fastspent i begge ender, dvs. at $y(x = x_0) = y(x = x_0 + L) = 0$ som gir:

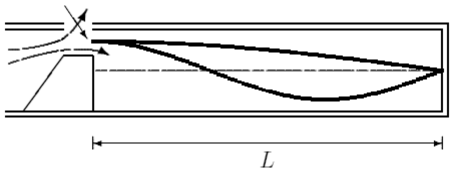
$$\cos kx_0 = 0 \Rightarrow kx_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos k(x_0 + L) = 0 \Rightarrow k(x_0 + L) = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

dvs. $kL = n\pi$ eller $L = n\frac{\lambda}{2}$

og frekvensen til n'te harmoniske svingning er $\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda} = n \cdot \frac{v}{2L}}$ og $\boxed{\lambda = L \Big/ \frac{n}{2}}$

Stående lydbølge (longitudinal)



Amplituden av trykkbølgen Δp er lik null ved munnstykket og maksimum ved enden.
Utslagsamplituden ξ er maksimal ved den åpne enden og null ved den lukkede enden.

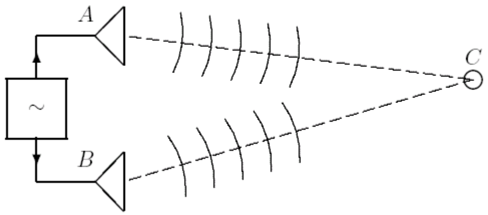
Dvs. $\xi(x = x_0) = \pm\xi_0$ og $\xi(x = x_0 + L) = 0$ som gir $\cos kx_0 = \pm 1 \Rightarrow kx_0 = n\pi$

og $\cos k(x_0 + L) = 0 \Rightarrow k(x_0 + L) = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ dvs. $kL = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$ eller $L = \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2}$

som betyr at $\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda} = \left(\frac{1}{2} + n\right) \cdot \frac{v}{2L}}$ og $\boxed{\lambda = L \Big/ \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)}$

For blåseinstrument som er åpen i begge ender fås $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ og $\boxed{f_n = n \cdot \frac{v}{2L}}$

Interferens



Utslagsamplitudene fra lydsignalene fra A og B (samme frekvens og fase) er omvendt proporsjonale med avstanden til C:

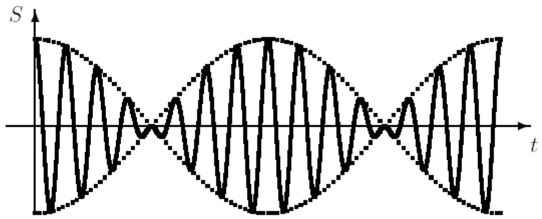
$$\xi_A = A\frac{1}{r_{AC}}\cos[k \cdot r_{AC} - \omega t] \quad \text{og} \quad \xi_B = B\frac{1}{r_{BC}}\cos[k \cdot r_{BC} - \omega t]$$

Faseforskjellen er:

$$\phi = [kr_{AC} - \omega t] - [kr_{BC} - \omega t] = k(r_{AC} - r_{BC}) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r_{AC} - r_{BC})$$

Hvis $\boxed{\phi = n \cdot 2\pi}$ svinger signalene ved mottakeren C i takt og forsterker hverandre: *Konstruktiv interferens*.
Hvis $\boxed{\phi = \pi + n \cdot 2\pi}$ svinger signalene i motfase og svekke hverandre. *Destruktive interferens*.

Svevning



En kombinasjon av to signaler med litt forskjellig frekvenser fører til svevning: $S(t) = A[\cos\omega_A t + \cos\omega_B t]$ hvor amplitudene for signalene er de samme for å forenkle beregningen. Vi innfører $\omega_0 = \frac{(\omega_A + \omega_B)}{2}$ og $\omega_d = \omega_A - \omega_B$ og får etter litt omskriving $\boxed{S(t) = 2A\cos\frac{\omega_d}{2}t \cdot \cos\omega_0 t}$ som gir bildet til venstre.

S(t) er et signal med grunnfrekvens ω_0 som er amplitudemodulert med en lavere frekvens $\frac{1}{2}\omega_d$.